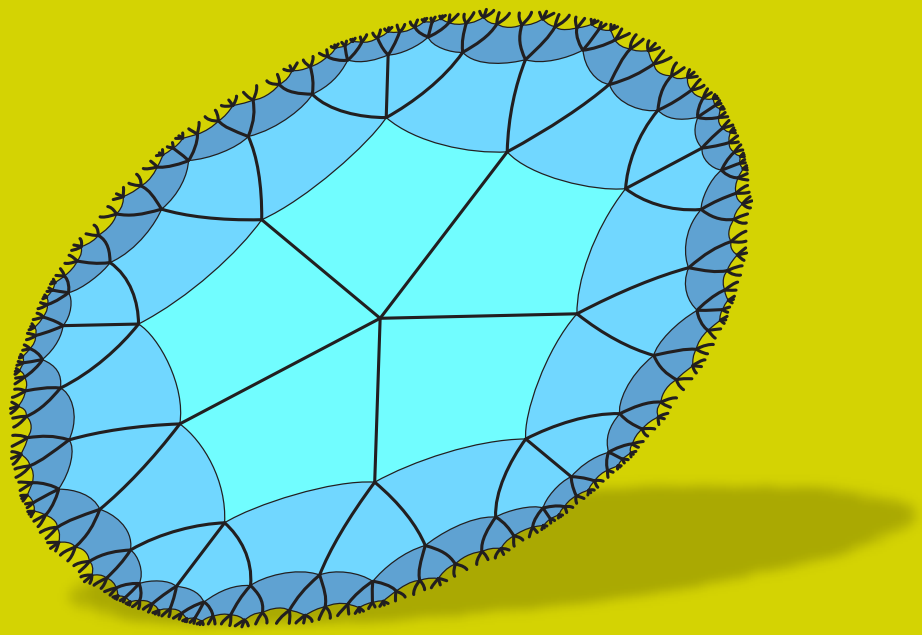
# Dimenziók

Matematikai Közlemények

VIII. kötet



SOE EMK Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság
2020

# Dimenziók

## Matematikai Közlemények

## VIII. kötet

**SOE EMK Matematikai Intézet**

**Soproni Tudós Társaság**

**2020**

Szerkesztők:

Dr. Németh László
egyetemi docens

Dr. Szalay László
intézetigazgató egyetemi tanár

Nagy Zsolt
címzetes egyetemi docens

Soproni Egyetem
Erdőmérnöki Kar
Matematikai Intézet
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.

MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.

Kiadja: SOE EMK Matematikai Intézet és Soproni Tudós Társaság

HU ISSN 2064-2172

# Tartalomjegyzék

Examples for an extended Barabási-Albert model with random initial degrees ..... 3

Nemszerkeszthető Johnson-poliéderek számítógépes modellezése dinamikus geometriai módszerekkel ..... 15

Az általánosított hiperbolikus kvaternióalgebrákról ..... 25

Bikvadratikus interpoláció TIN felületmodellben ..... 35

Havi átlaghőmérsékletek regressziós vizsgálata ..... 43

Másodrendű differenciálegyenletes modellek ..... 53

Áttekintés a hiperbolikus Pascal háromszögekről ..... 61

doi:10.20312/dim.2020.01

# Examples for an extended Barabási-Albert model with random initial degrees

**Sándor Zsuppán**
Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium és Kollégium
zsuppans@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Véletlen gráfok kiterjesztett Barabási-Albert modelljének, a Cooper-Frieze modellnek három speciális esetét vizsgáljuk az egyenletes eloszlás, a Zipf eloszlás és a binomiális eloszlás alkalmazásával. A kapott elméleti összefüggéseket számítógéppel generált gráfokkal illetve a szakirodalomban fellelhető három valós hálózattal is összehasonlítjuk.

ABSTRACT. We investigate three examples for an extended Barabási-Albert model with random inicial degrees. We evaluate the general theoretical model due to Cooper-Frieze using the uniform, the Zipf and also the binomial distributions for the initial degrees of the nodes. We compare the evaluated formulae to computer-generated graphs and also to some known reference networks.

## 1. Introduction

The Barabási-Albert model [1] is an algorithm for generating random graphs using preferential attachment. It is an important model for producing scale-free networks, which degree distribution obeys a power-law. It serves also as a basis for many generalizations [2]. Particularly general ones of them are the Cooper-Frieze model [3] and its extension [5]. They utilize an attachement rule, which is a mixture of the preferential rule and a uniformly at random rule. They incorporate the Barabási-Albert model and many other related models as special cases.

In this short note we also investigate a special case of the Cooper-Frieze model. We describe the notation and formulate some theoretical results based on the references [3] and [5]. The main contribution of this note to the topic is the utilization of the general formulae in [3, 5] for three special cases and an illustration of the theoretical formulae with examples using NetworkX [4]. We also compare the considered cases to real networks from [6] and [7].

## 2. Main results

### 2.1. Notation and preliminaries

According to the Barabási-Albert (BA) model the undirected random graph grows by adding in each step a single node and a specified amount $m$ of edges from this node. The terminal nodes of these edges are chosen from the set of the existent nodes according to the preferential attachement rule, i.e. with probability depending on the degree of these nodes [1, Section 5]. This process starts with a connected simple seed graph having at least $m$ nodes

and runs until the graph achieves a prescribed amount $n(>m)$ of nodes. The resulting graph depends on the parameters $n$, $m$ and on the seed. In this note we use an empty graph of $m$ nodes and the first node connects an edge to each of them ensuring connectivity.

We investigate a variant of the BA-model: the amount of the edges from each new node to the graph is determined from the set $\{1,2,\dots,m\}$ according to a prescribed probability distribution $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\dots,p_m)$. Although it is a generalization of the BA-model, it is only a very special case of the Cooper-Frieze model, see [3, Section 2.1] for its description. It is also a special case of the PARID model derived in [5] because we use a finite distribution $\boldsymbol{p}$. By [3, Theorem 1] the expected portion of nodes of degree $k$ is well approximated by an auxiliary sequence $d_k$, see equations (2) and (14) in [3]. More precisely for the case considered here, the portion of nodes of degree $k$ is a random variable $\delta_k$ the expected value of which fulfills almost surely

$$|\boldsymbol{E}(\delta_k)-\ d_k| \le C\,\frac{\log n}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

with some positive constant $C$ for each $k,n\ge 1$, see [3, Theorem 1]. That is, the expected portion of nodes with degree $k$ is concentrated around the quantity $d_k$. Moreover, in our simplified case for $k>m$ the quantity $d_k$ obeys a power-law with exponent 3, i.e. $d_k\sim\frac{\text{constant}}{k^3}$, see [3, Theorem 2. case (iii)]. That is, the BA-model variant considered here has the same power law exponent as the original BA-model [1,2].

The sequence $d_k$ is defined by $d_0=0$ and

$$d_k=\tfrac{k-1}{k+2}\,d_{k-1}+\tfrac{2}{k+2}\,p_k \text{ for } k\ge 1. \tag{2}$$

Considering that $p_k=0$ for $k>m$, the equation (2) simplifies to

$$d_k=\tfrac{k-1}{k+2}\,d_{k-1} \text{ for } k>m, \tag{3}$$

which is equation (5.37) in [1] for the BA-model.

**Remark 1.** If we set the vector $\boldsymbol{p}$ for the prescribed probabilities $\boldsymbol{p}=(0,\dots,0,p_m=1)$, then the system (2) simplifies to $d_m=\frac{2}{m+2}$, which is (5.38) in [1]. Moreover, we also have $d_k=0$ for $k<m$. Hence for $\boldsymbol{p}=(0,\dots,0,p_m=1)$ we have the original BA-model.

**Theorem 1.** The system (2) for $1\le k\le m$ with initial condition $d_0=0$ has the unique solution

$$d_k=2\cdot\textstyle\sum_{j=1}^{k}\frac{(j+1)j}{(k+2)(k+1)k}\,p_j \text{ for } 1\le k\le m, \tag{4}$$

and

$$d_k=\tfrac{(m+2)(m+1)m}{(k+2)(k+1)k}\cdot d_m \text{ for } m<k. \tag{5}$$

PROOF. Substituting (4) into (2) we obtain for $1\le k\le m$ by elementary calculations that

$$\frac{k-1}{k+2}d_{k-1}+\frac{2}{k+2}p_k = 2\cdot\frac{k-1}{k+2}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(j+1)j}{(k+1)k(k-1)}p_j+\frac{2}{k+2}p_k$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1}\frac{2(j+1)j}{(k+2)(k+1)k}p_j+\frac{2(k+1)k}{(k+2)(k+1)k}p_k = d_k.$$

Similarly there follows for $m < k$ that

$$\frac{k-1}{k+2}d_{k-1} = \frac{k-1}{k+2}\cdot\frac{(m+2)(m+1)m}{(k+1)k(k-1)}\cdot d_m = d_k. \blacksquare$$

Theorem 1. does not contain anything novel, we included its short proof only for the convenience of the reader. The linear recurrence (2)-(3) and its solution (4) and (5) are special cases of recurrence (1.4) and its solution (1.5) in [5], respectively. There are, however, two differences between them. Here we use a distribution vector $\boldsymbol{p}$ with only finitely many nonzero elements, and our seed graph has $m+1$ initial nodes not only two. Hence the system (2)-(3) and also its solution (4)-(5) consists of two parts: the first part (2)-(4) describes those part of the graph with nodes of degrees between 1 and $m$, while the second part (3)-(5) describes that with nodes of higher degree than parameter $m$. We investigate those two parts in the following using three selected distributions for $\boldsymbol{p}$, first a discrete uniform in Example 1. below, second in Example 2 a discrete Zipf-distribution and finally in Example 3 a binomial distribution. We compare the theoretical predictions (4)-(5) to numerically generated graphs. We also compare them to three known benchmark networks from [6] and [7].

There can be many similarities and differences between the two mentioned parts of the graph. However, here we focus mainly on one of them, which is the portion of the nodes in each of the two parts. Adding the equations (2) for $1 \le k \le m$ and using that $\boldsymbol{p}$ describes a discrete probability distribution, i.e. $\sum_{j=0}^{m} p_j = 1$, leads to

$$\sum_{k=1}^{m} d_k = 1-\frac{m}{2}d_m.$$

Setting $k = m$ in (4) and substituting it into this equation leads to

$$\sum_{k=1}^{m} d_k = 1-\sum_{j=1}^{m}\frac{(j+1)j}{(m+2)(m+1)}p_j. \tag{6}$$

By (1) there follows

$$\left|\boldsymbol{E}\left(\sum_{k=1}^{m}\delta_k\right)-\sum_{k=1}^{m}d_k\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left|\boldsymbol{E}(\delta_k)-d_k\right| \le C\cdot\frac{m\log n}{\sqrt{n}}. \tag{7}$$

Hence, by (6) and (7) the expected portion of the nodes in the degree range $1 \le k \le m$ depends mainly on the parameter $m$ and on the distribution $\boldsymbol{p}$. The quantity (6) can be evaluated using the generating polynomial $P(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j x^{j-1}$ of the distribution $\boldsymbol{p}$. By $\left(x^2P(x)\right)'' = \sum_{j=1}^{m}(j+1)jp_jx^{j-1}$ equation (6) becomes

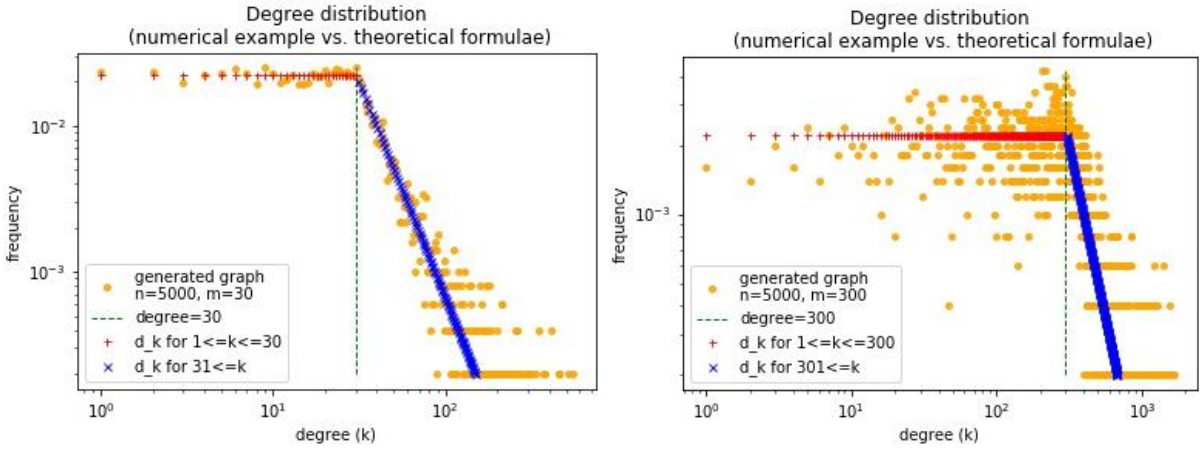
$$\sum_{k=1}^{m} d_k = 1-\frac{1}{(m+2)(m+1)}\left(x^2P(x)\right)''\Big|_{\cdot x=1}.$$

### 2.2. Numerical examples with generated graphs

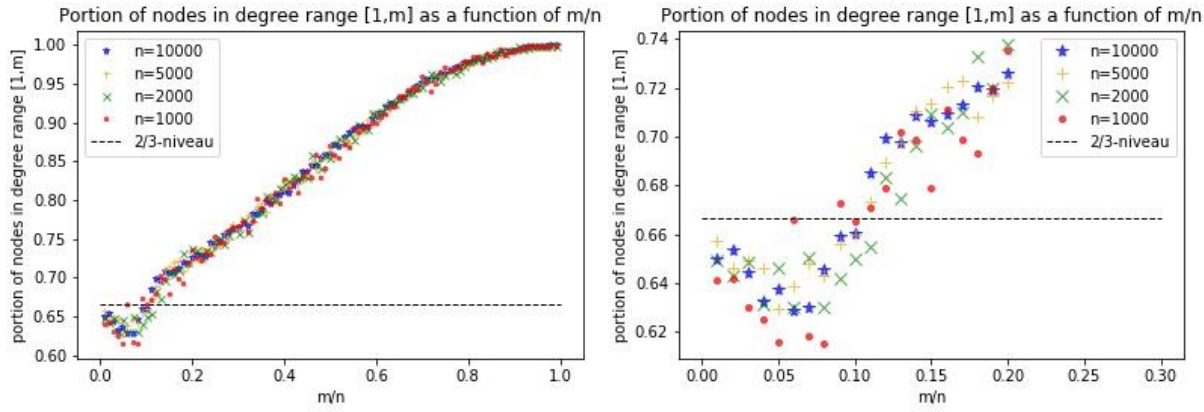
**Example 1.** If we set $p_j = \frac{1}{m}$ for each $j \in \{1, \dots, m\}$, i.e. the random variable describing the amount of edges each new node connects to the graph is uniformly distributed, then from (4) there follows for $1 \leq k \leq m$ that

$$d_k = 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{(j+1)j}{(k+2)(k+1)k} \cdot \frac{1}{m} = \frac{2}{3m},$$

and for $m < k$ we have $d_k = \frac{2}{3} \cdot \frac{(m+2)(m+1)}{(k+2)(k+1)k}$. Moreover, there also follows $\sum_{k=1}^{m} d_k = \frac{2}{3}$, i.e. the portion of the nodes in degree range $\{1, \dots, m\}$ is constant. The two pictures below show a comparison of these formulae with generated graphs of $n = 5000$ nodes and parameter values of $m = 30$ and $m = 300$, respectively. For the smaller value of $m$ we can observe a better matching of the theoretical formulae with the example graph data.




In order to understand the observable difference between the two degree distributions we plot the portion of nodes in the degree range $k \in [1, m]$ as a function of $\frac{m}{n}$ for more generated graphs.




The theoretical result, that $\sum_{k=1}^{m} d_k = \frac{2}{3}$ for uniform $\boldsymbol{p}$, holds with good approximation in case $1 \leq \frac{m}{n} \lesssim 0.1$. Above this niveau $\sum_{k=1}^{m} d_k$ grows approximately linear as a function of $\frac{m}{n}$ until $\frac{m}{n} \sim 0.7$. The slope of this linear growth was in the numerical experiments approximately $0.46$

independently of $n$. For $0.7 \lesssim \frac{m}{n}$ the portion of the nodes saturates to 1 because the generated graph comes very near to the seed graph which for $m = n - 1$ is a star with one node of degree $m$ and $n - 1$ nodes of degree 1.

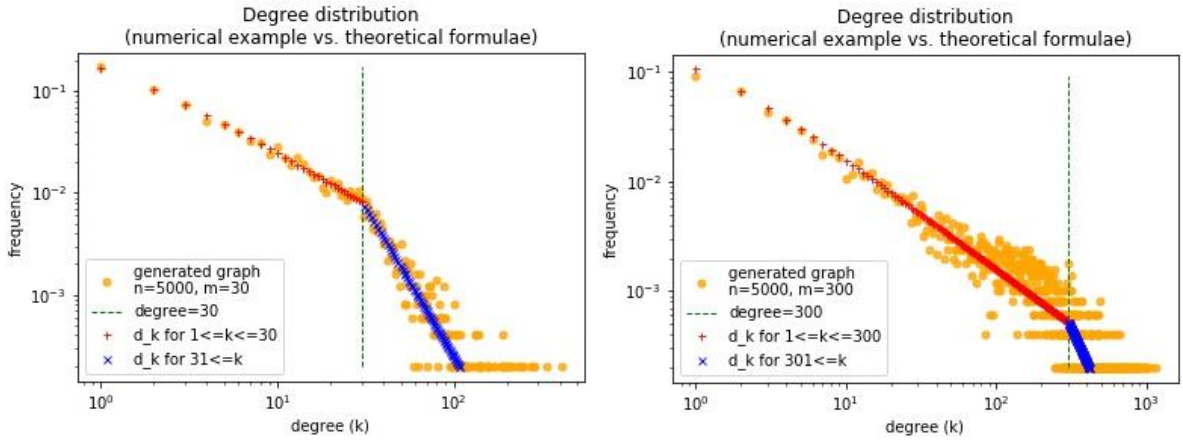
**Example 2.** If we set $p_j = \frac{1}{jH_m}$ for $1 \le j \le m$ in $\boldsymbol{p}$, where $H_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}$ denotes the $m$-th harmonic number, then the amount of edges each new node connects to the graph follows a discrete Zipf distribution. In this case there follows from (4) and (5) that

$$d_k = 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{(j+1)j}{(k+2)(k+1)k} \cdot \frac{1}{jH_m} = \frac{(k+3)k}{(k+2)(k+1)} \cdot \frac{1}{H_m} \text{ for } 1 \le k \le m \text{ and}$$

$$d_k = \frac{(m+2)(m+1)m}{(k+2)(k+1)k} \cdot d_m = \frac{(m+3)m}{(k+2)(k+1)k} \cdot \frac{1}{H_m} \text{ for } m < k.$$

The expected degree distribution in the degree range $1 \le k \le m$ follows approximately a power-law with exponent 1 because $d_k \sim \frac{1}{k}$. In other words $d_k$ itself has approximately a discrete Zipf distribution over the set $\{1, \dots, m\}$ like $\boldsymbol{p}$.

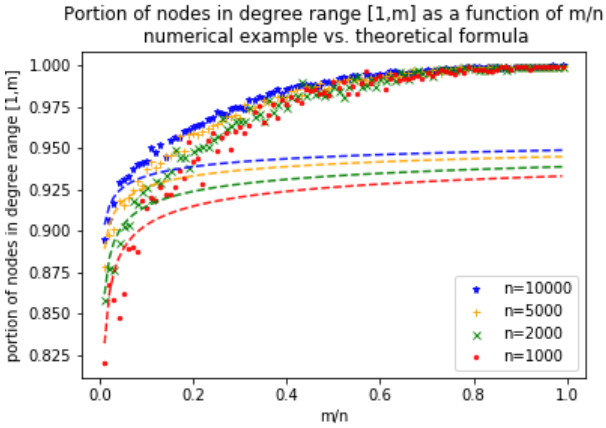
We compare these theoretical results again to two generated graphs with $n = 5000$ nodes and parameter values $m = 30$ and $m = 300$, respectively. We can observe a better matching again for the smaller parameter value as in Example 1.

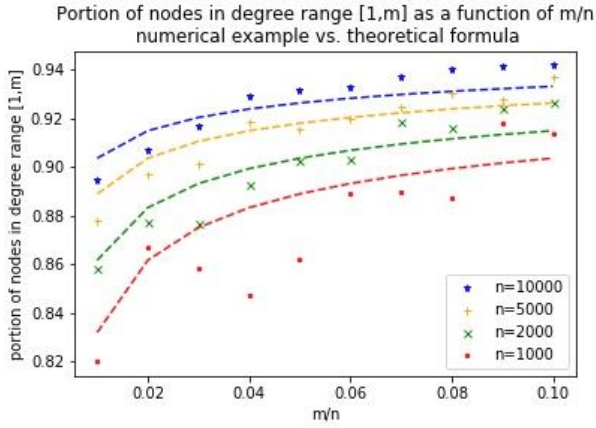



By (6) the expected portion of the nodes in the degree range $1 \le k \le m$ is

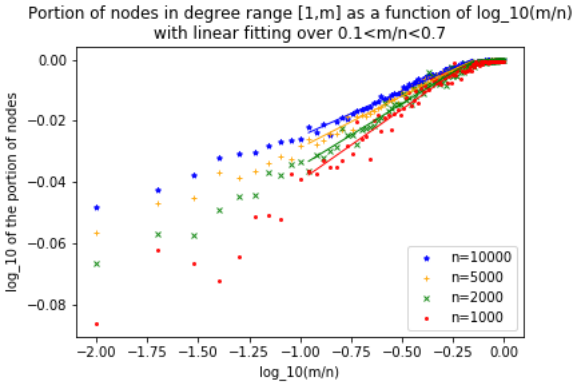
$$\sum_{k=1}^{m} d_k = 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{(j+1)j}{(m+2)(m+1)} \cdot \frac{1}{jH_m} = 1 - \frac{m(m+3)}{2H_m(m+1)(m+2)} \ge \frac{2}{3}, \qquad (8)$$

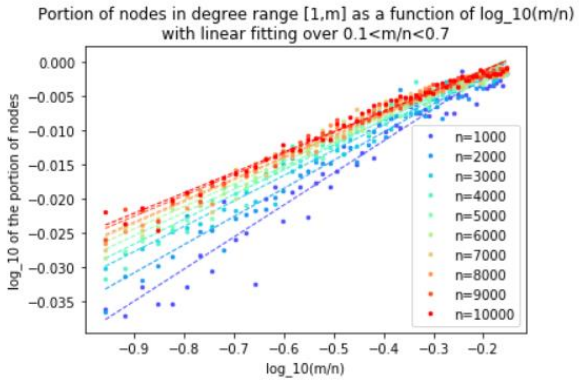
which now depends on the parameter $m$. We can observe this dependence on the next two diagrams, where the expected portion (8) is shown for four graph examples.



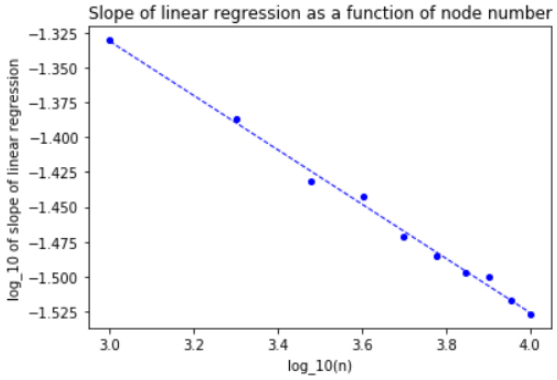




The theoretical result (8) plotted with dashed curves holds again with good approximation only in the range $1 \leq \frac{m}{n} \lesssim 0.1$. For $\frac{m}{n} \gtrsim 0.1$ the quantity $\log \sum_{k=1}^{m} d_k$ grows approximately linear as a function of $\log \frac{m}{n}$ until $\frac{m}{n} \sim 0.7$, then it saturates similar to the case in Example 1.




According to the next diagram now the slope of this growth depends on the number of nodes.




**Remark 2.** If the initial degree distribution $\boldsymbol{p}$ itself obeys a power-law like in Example 2., then we have to competing power-laws during the graph generating process. One of them is that discribing $\boldsymbol{p}$ and the other one induced by the preferential attachement model. According to [5, Proposition 1.3], if the power-law exponent of $\boldsymbol{p}$ is bigger than two, then that power-law with lower exponent (the more heavy tailed distribution) dominates, i.e. it will be the exponent of the power-law describing the expected degree distribution of the generated graph. Something similar happens in our Example 2. We have a Zipf distribution with exponent 1 for $\boldsymbol{p}$ and a

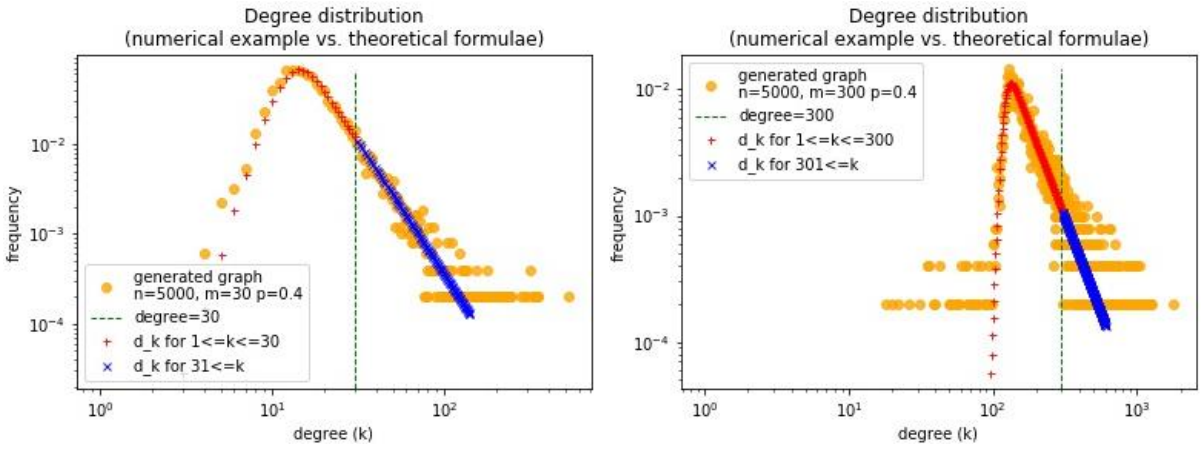
Barabási-Albert type preferential attachement model with exponent 3. However, in our example we use a finitly supported Zipf distribution and neither power-law dominates the degree distribution of the whole graph. Instead, the graph consits of two parts and in each of them one of the power-laws dominates. In the lower part, i.e. in degree range $\{1, \dots, m\}$, the exponent of the initial degree distribution dominates, while in the upper part the other one described by the BA-type preferential attachement model. This is the same case as in Example 1., where the degree distribution on degree range $\{1, \dots, m\}$ is dominated by the uniform distribution of $\boldsymbol{p}$, which itself can be interpreted as a power-law with exponent 0.

**Remark 3.** Although estimation (7) holds for each fixed value of $m$ and is useful in case $n \to \infty$, it is not very informative in case when $m$ is comparable to $n$. As we can observe it in both of Examples 1 and 2, there is a significant discrepancy regarding the portion of the nodes in the degree range $\{1, \dots, m\}$ between the theoretical formulae and the computationally generated graphs. However, this does not occur for relatively small parameters $m$. The slopes of the linear regressions above seem to depend on the number of nodes $n$ in the experiment.

**Example 3.** If we set $p_j = \binom{m-1}{j-1} p^{j-1}(1-p)^{m-j}$ for $1 \le j \le m$ in $\boldsymbol{p}$, then the amount of initial edges from each new node follows a binomial distribution with success probability $p$. In this case the quantites (4) and (5) can only be evaluated numerical. However, the portion of the nodes in degree range $\{1, \dots, m\}$ can be evaluated analytically using the generating polynomial of $\boldsymbol{p}$. It becomes

$$\sum_{k=1}^{m} d_k = 1 - \frac{(m-1)(m-2)p^2+4(m-1)p+2}{(m+2)(m+1)}.$$

We compare these theoretical results again to two generated graphs with $n = 5000$ nodes and parameter values $m = 30$ and $m = 300$, respectively. Although we have now an additional parameter, namely the success probability $p$.




We can observe a better matching again for the smaller parameter value as in the Examples 1 and 2. However we now have an additional discrepancy between the generated and the theoretically predicted data for lower degrees.

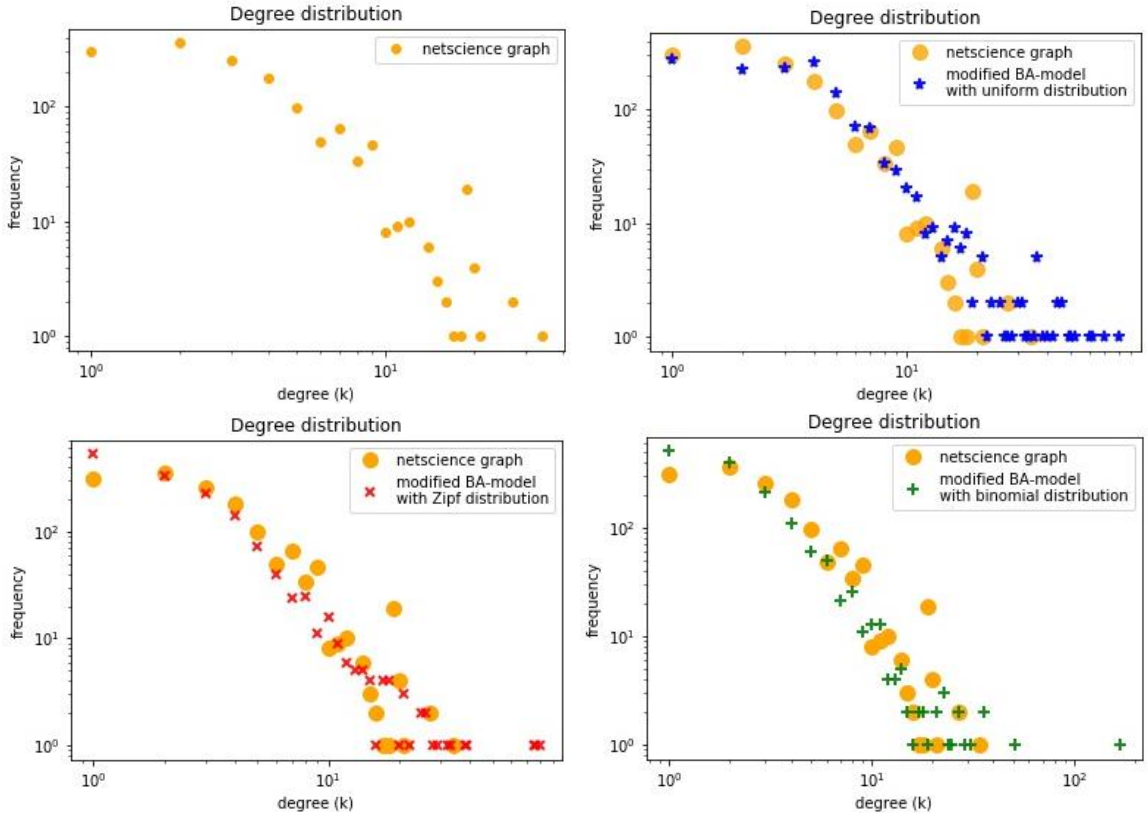
### 2.3. Comparison of the results with real networks

We compare the three investigated graph generating models to real networks. In the models a random graph with $n$ nodes is generated from a star seed graph of $m+1$ nodes. According to the distribution described by $\boldsymbol{p}$ the expected number of new edges in each step is $\sum_{j=1}^{m} jp_j$. If $e$ denotes the number of edges in the real graph, then we use the equality

$$m + (n - m - 1) \cdot \sum_{j=1}^{m} jp_j = e \tag{9}$$

for the determination of the parameter $m$ in the models. In case of uniform distribution (9) can be solved analytically but for the Zipf and binomial distributions we obtain $m$ resp. $(m, p)$ numerically. For the model using binomial ditribution there is another equation needed in order to solve (9) for both parameters $m$ and $p$. We have chosen the other equation so that the resulting model with binomial distributed $\boldsymbol{p}$ predicts the portion of the nodes in degree range $\{1, \dots, m\}$ with good precision.

First we use the „netscience.gml" file containing a coauthorship network of scientists working on network theory and experiment, as compiled by M. Newman in May 2006, see reference [7]. It is a graph of $n = 1589$ nodes and $e = 2742$ edges. However, among the nodes there are 128 isolated ones, therefore we take into account only $n = 1461$ nodes for comparison with the models. In view of (9) the corresponding modified BA-model with uniform $\boldsymbol{p}$ has parameter $m = 4$, the other model with Zipf distribution has $m = 3$. The parameters of the binomial model are $m = 9$ and $p = 0.11044$. For the upper tail of the degree distribution all models predict hubs with higher degrees compared to the real graph. In the middle part of the distribution all models fit fairly well.



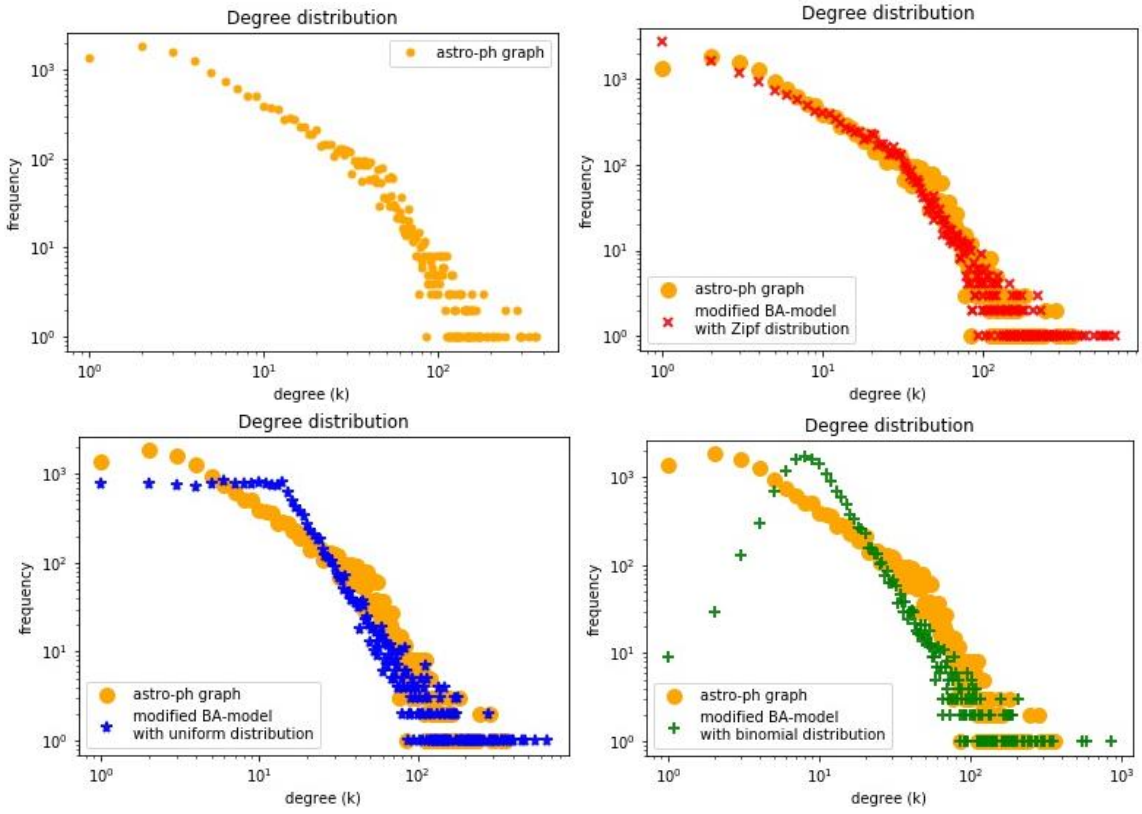
The portion of the nodes in the degree range $\{1, \dots, m\}$

- equals 0.754 in the real network for $m = 4$, which differs from the predicted portion $\frac{2}{3}$ for the uniform $\boldsymbol{p}$ with $m = 4$,
- equals 0,631 in the real network for $m = 3$, while the model with Zipf-distributed $\boldsymbol{p}$ and $m = 3$ predicts 0.755,
- equals 0,954 in the real network for $m = 9$, which correspondes good to 0,943 predicted by the binomial model. (This is of course so, because we have chosen the parameters $m$ and $p$ according to this.)

Hence for this network the model with binomial distributed initial degrees performs better compared to the other two models.

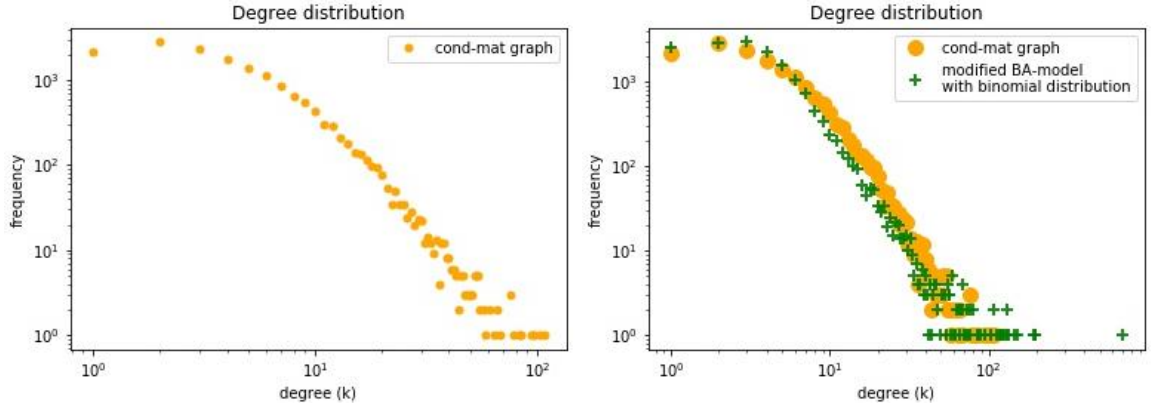
The second example is the file „astro-ph.gml" containing the collaboration network of scientists posting preprints on the astrophysics archive at www.arxiv.org, 1995-1999, as compiled by M. Newman, see reference [6]. It consists of $n = 16706$ nodes and $e = 121251$ edges. However, among the nodes there are 660 isolated ones, therefore we take into account only $n = 16046$ nodes for comparison with the models. So, the modified BA-model with uniform $\boldsymbol{p}$ has parameter $m = 14$, the model with Zipf distribution has $m = 30$ and for the model with binomial initial degree distribution we obtain $m = 13$ and $p = 0{,}5469$. The portion of the nodes in degree range $\{1, \dots, m\}$

- equals 0.689 in the real network for $m = 14$, which fits fairly good to the predicted portion $\frac{2}{3}$ for the uniform $\boldsymbol{p}$ with $m = 4$,
- equals 0,852 in the real network for $m = 30$, which is near to 0.875 predicted by the model with Zipf-distributed $\boldsymbol{p}$ and $m = 30$,
- equals 0,670 in the real network for $m = 13$, which corresponds good to 0,678 predicted by the binomial model. (But this is of course so, because we have chosen the parameters $m$ and $p$ according to this.)



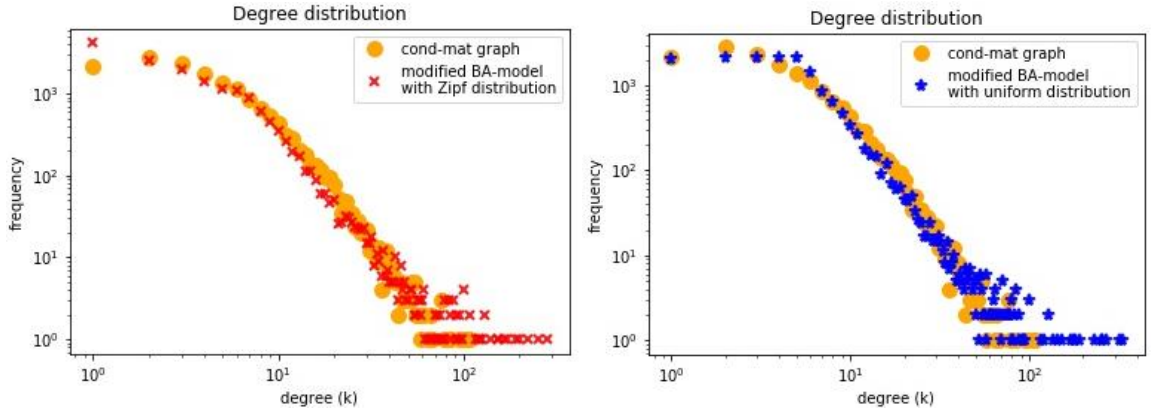
Altough the model using binomial distribution was chosen so that its expected number of nodes and its expected portion of nodes in degree $\{1, \dots, m\}$ range fit to the corresponding characteristics of the real network, its degree distribution differs considerably from that of the real network. In this example the Zipf-based model approximates the real network best.

The third example we investigate here is „cond-mat.gml" containing the collaboration network of scientists posting preprints on the condensed matter archive at www.arxiv.org, 1995-1999, as compiled by M. Newman [7]. It consists of $n = 16726$ nodes and $e = 47594$ edges. However, there are 462 isolated nodes, therefore we take into account only $n = 16264$ nodes for comparison with the models. So, the modified BA-model with uniform $\boldsymbol{p}$ has parameter $m = 5$, the model with Zipf distribution has $m = 7$ and the model with binomial distribution $m = 28$ and $p = 0{,}07148$.




Concerning the portion of nodes in degree range $\{1, \dots, m\}$:

- with $m = 5$ this portion of nodes in the real network is 0,657 which comes fairly close to the predicted $\frac{2}{3}$ by the model with uniform initial degree distribution,
- with $m = 7$ this portion of nodes in the real network is 0,769, which matches the predicted 0,813 by the model with Zipf initial degree distribution rather good,




- with $m = 28$ this portion of nodes in the real graph is 0,986 which comes close to the predicted 0,985 by the model with binomial initial degree distribution just because its parameters were constructed so.

In this example perform all three models again fairly good. However, considering the upper tail of the degree distributions, the binomial-based model performs better than the other two, because it predicts not so many hubs then the other two models.

## 3. Conclusion

We have investigated three examples for a Barabási-Albert type model with random initial degrees. In all examples happend the degree distribution of the resulting graph to consist of two parts: the lower tail of it was biased by the given initial degree distribution while the upper tail by the used preferential attachement model. This partition was also observable in the investigated reference networks. None of the considered models performed equally good for all real examples. The predictions of the theoretical formulae were more accurate in case the maximum initial degree is considerably less than the number of all nodes. The more the maximum initial degree increases, the more is the resulting graph influenced by the seed graph in our models.

## Reference

[1] **Barabási A-L.**, Network Science, Libri Könyvkiadó, Budapest 2019. http://networksciencebook.com/
[2] **Bollobás B., Riordan O.M.**, Mathematical results on scale-free random graphs, in: Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KgaA (2002), doi.org/10.1002/3527602755.ch1
[3] **Cooper C., Frieze A.**, A general model of web graphs, Random Sctructres and Algorithms Vol. 22 Issue 3 (2003), 311-335. doi.org/10.1002/rsa.10084
[4] **Hagberg A., Schult D., Swart P.,** Exploring Network Structure, Dynamics, and Function using NetworkX in Proceedings of the 7th Python in Science conference (SciPy 2008), G Varoquaux, T Vaught, J Millman (Eds.), pp. 11-15. https://networkx.github.io/documentation/stable/
[5] **Deijfen M., van den Esker H., van der Hofstad R., Hooghiemstra R.**, A preferential attachment modelwith random initial degrees, Ark. Mat.,47(2009), 41-72. doi.org/10.1007/s11512-007-0067-4
[6] **Newman M. E. J.**, The structure of scientific collaboration networks, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 98, 404-409 (2001) http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/
[7] **Newman M. E. J.**, Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices, Preprint physics/0605087 (2006) http://networkdata.ics.uci.edu/data/netscience/

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
VIII. kötet, 2020



doi:10.20312/dim.2020.02

# Nemszerkeszthető Johnson-poliéderek számítógépes modellezése dinamikus geometriai módszerekkel

**Talata István**
Óbudai Egyetem,
Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest,
talata.istvan@ybl.uni-obuda.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Vannak olyan, csak szabályos sokszöglapok által határolt konvex nemuniform poliéderek, melyek nem modellezhetők euklidészi típusú szerkesztéssel (a körzővel és vonalzóval történő síkbeli szerkesztés 3-dimenziós analogonjával). Dinamikus geometriai módszerek alkalmazásával azonban tetszőleges pontossággal modellezhetők ezek a poliéderek: minden ilyen poliéderhez megszerkeszthető egy olyan paraméteres, számítógépes poliédermodell, amely egy egyparaméteres poliédercsalád modellje, és egy bizonyos paraméterérték esetén az adott, szabályos sokszöglapokkal határolt poliéderrel egyezik meg, valamint a paraméterérték a szükséges pontossággal beállítható úgy, hogy a hozzá tartozó virtuális modell tetszőleges előírt mértékben közelítse a kívánt poliédert.

ABSTRACT. There are convex nonuniform polyhedra bounded only by regular polygonal faces that can not be modeled by a Euclidean construction (using the 3-dimensional analogue of a ruler and compass planar construction). However, using methods of dynamic geometry, it can be achieved that such a polyhedron is modeled within arbitrary accuracy: for each such polyhedron, a computer model of a parametric polyhedron can be constructed as the result of Euclidean construction steps, that is the model of a single-parameter polyhedron family, and it is congruent to the given polyhedron for a specific parameter value, having only regular polygonal faces, and the parameter value can be adjusted until it is necessary to achieve the required accuracy of the virtual model for the given polyhedron.

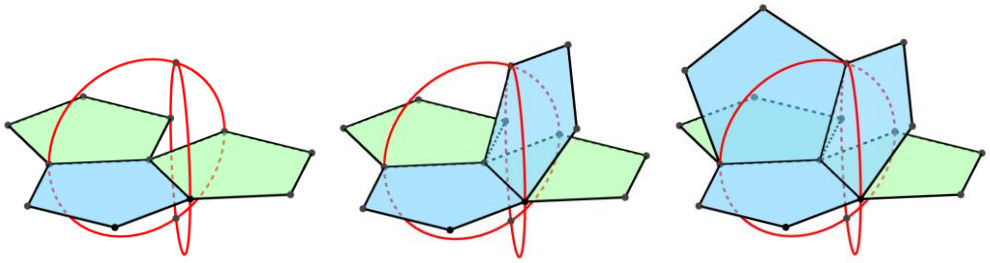
## 1. Bevezetés

A 3-dimenziós alakzatok számítógépes modellezésekor lehetőség van geometriai módszerek használatára – ekkor egyszerű alakzatokból kiindulva készítünk összetett modellt, új alakzatok vagy segédalakzatok segítségével (pl. szerkesztőegyenesek, szakaszok, körök, síkok, sokszöglapok, gömbök felhasználásával), és geometriai transzformációk (pl. forgatás, eltolás, tükrözés) alkalmazásával. Ez elegánsabb módszer, mint a másik, amikor matematikai számításokkal előállított pontkoordináták alapján viszünk fel térbeli pontokat, és azokra illeszkedő alakzatokat készítünk (pl. egy poliéder modellje eképp is elkészíthető).

A geometriai modellezési módszerek előnye, hogy a modellezett alakzat bizonyos tulajdonságait nem kell külön ellenőrizni, mert a konstrukcióból következnek: egyes esetekben például egy test szimmetriáit felhasználva forgatásokkal és tükrözésekkel készíthető el a modell

KULCSSZAVAK. Johnson-poliéder, dinamikus geometria, számítógépes modellezés, szerkeszthetőség.
KEYWORDS. Johnson solid, dynamic geometry, computer modeling, Euclidean construction.

egy része, ezért a szimmetria igazolásához nem kellenek további számítások. A valódi modellezést is szimulálhatjuk geometriai módszerekkel: például amikor egy poliéder felületét, vagy annak egy részét a síkba kiterített laphálójából, lapok felhajtásával készítjük el, akkor ez úgy modellezhető geometriai módszerekkel, hogy egy-egy lapot forgatunk ez másik lappal közös éle mentén, és gyakran még a forgatás szöge is megszerkeszthető (ld. az 1. ábrát).



**1. ábra. Szabályos dodekaéder egyik csúcsánál találkozó ötszöglapok elkészítése forgatásokkal**

Szoftverekkel a 3-dimenziós térbeli geometriai szerkesztések többnyire csak euklidészi típusú térbeli szerkesztésekként (a körzővel és vonalzóval történő síkbeli szerkesztések 3-dimenziós analogonjaként) végezhetők el, síkokkal, gömbökkel, térbeli egyenesekkel, térbeli körökkel dolgozva, vagy olyan parancsokat alkalmazva, amelyek esetén a szerkesztés ilyen térelemekre vezethető vissza (pl. sokszöglapokat, szakaszokat, köríveket is bemeneti térelemként elfogadó parancsok esetén).

Ezért, ha a szerkesztési műveleteink csak az előzőleg megszerkesztett alakzatokon alapulnak, akkor pontosan olyan koordinátájú pontok szerkeszthetők meg ilyen módszerekkel, mint a szokásos síkbeli, körzővel és vonalzóval történő szerkesztésekkor. Ennek következménye, hogy ha egy poliéder euklidészi szerkesztése lehetséges, akkor a poliéder bármely két csúcsának a távolsága, és bármely két lapszögének a koszinusza olyan valós szám kell, hogy legyen, melyet a racionális számok feletti másodrendű testbővítések véges sokszori egymás után alkalmazásával kapunk meg. Ezért például egy ilyen mennyiséghez tartozó racionális együtthatós minimálpolinom fokszáma 2 pozitív hatványa kell, hogy legyen (ez szükséges, de nem elégséges feltétel a szerkeszthetőségre), ld. a 2. fejezetet a szerkeszthetőségre vonatkozó további részletekért.

A szabályos testek mind szerkeszthetők, az arkhimédészi, félig szabályos testek (ld. [2], [3]) között azonban már találhatók nem szerkeszthető testek: a pisze kocka és a pisze dodekaéder. A Johnson-poliéderek olyan konvex poliéderek, melyeknek minden lapjuk szabályos sokszög, de csúcsaiknál nem „egyformák” (úgy mondjuk, hogy „nem uniform poliéderek”), azaz van legalább két olyan csúcsuk, melyekre nem található a térnek olyan egybevágósága, mely az egyik csúcsot átviszi a másikba, miközben a poliédert önmagába képezi le. A 92 Johnson-poliéder közül 85 könnyen szerkeszthető (ld. [1], [8], [10]). Van azonban 7 olyan Johnson-poliéder, amely nem szerkeszthető (vagy valószínűleg nem szerkeszthető), ezek a J84-J90 sorszámú poliéderek, ld. a 3. fejezetet további részletekért.

A dinamikus geometriai szoftverek sajátossága, hogy bizonyos fajta paraméteres modellezés is megvalósítható velük, pl. szakaszon vagy körön változtathatjuk egy vagy több pont helyét, vagy egy (esetleg több) olyan paramétert vezethetünk be, amelynek értékeit véges intervallumban, adott lépésközzel változtathatjuk, és az ilyen paraméter(ek) értékének megváltoztatásakor egy adott szerkesztési eljárásban a végeredmény is értelemszerűen frissül és módosul. Ezáltal lehetőségünk van arra, hogy ne kelljen újra és újra elvégezni ugyanazt a szerkesztési eljárást különböző bemeneti paraméterekre, amíg a szerkesztés végeredménye valamely kívánalmaknak meg nem felel, hanem a bemeneti paraméter(ek) változtatásával

kikísérletezhető, hogy milyen paraméterértékekre lesz az eredmény elég közel a kívánalmakhoz.

A J84-J90 Johnson-poliéderek modellezése során olyan eljárásokat fogunk tudni megadni a 4. és 5. fejezetekben, amelyek mindegyike egyetlen, de az adott poliédertől függően kiválasztott geometriai jelentésű paraméteren alapul.

A továbbiakban feltesszük (hacsak valahol konkrétan másképp nem írjuk), hogy a modellezni kívánt poliéder élei egységnyi hossszúak (így egyszerűbben írható le a modellezésünk). Egy lapszög lesz a paraméter mindegyik vizsgált poliéder esetén, és egy olyan poliédermodellt készítünk el térbeli euklidészi szerkesztéssel (felhasználva a paraméter aktuális értékét), amelynek a laphálója megegyezik az adott poliéderével, és néhány éle, ill. lapja kivételével az élei ill. a lapjai egybevágóak az adott poliéderen hozzájuk tartozó élekkel, ill. lapokkal, azaz csak egyetlen vagy esetleg néhány éle nem lesz egységnyi hosszú, és elég sok lapja szabályos sokszög lesz.

A paraméter változtatásakor a poliédermodell alakja folytonosan deformálódik. Ha a modellünket úgy képzeljük, hogy a mindvégig szabályos sokszöglapok merev lemezek, melyek a szomszédos lemezekhez csuklósan kapcsolódnak a közös élek mentén, akkor ennek a csuklós szerkezetnek egy egyparaméteres mozgását kapjuk a paraméter változtatásakor. Egy bizonyos élhosszat figyelünk majd, lesz amikor az egységnél kisebb, és lesz, amikor egységnél nagyobb lesz a hossza. Folytonossági meggondolások alapján valahol fel kell, hogy vegye az egységnyi hosszúságot, és intervallumfelezéssel be tudjuk úgy állítani a paraméter értékét, hogy a kérdéses élhossz egy hibahatárnál közelebb legyen az egységhez (a szoftveres korlátokat is figyelembe véve, a valóságban persze nem tudunk bármekkora pontosságot elérni). Ekkor a poliédermodellünk minden éle a hibahatárnál közelebb lesz az egységhez, és így jó közelítése lesz a modellezni kívánt Johnson-poliédernek.

Végül megmutatjuk, hogy a pisze kocka és pisze dodekaéder arkhimédészi testek esetében is lehetséges hasonló konstrukció, csak akkor a paraméteres modellben a nagyfokú szimmetria miatt elég sok él nem lesz végig egységnyi hosszú a paraméter összes lehetséges értékére, hanem kétféle élhossz lesz, egységnyi élhossz és egy másik élhossz, amelyik értéke változik a paraméter változtatásakor

## 2. Szerkeszthetőség a 3-dimenziós térben

A 3-dimenziós euklidészi tér síkokra és gömbökre épülő szerkesztései a síkbeli, körzővel és vonalzóval történő szerkesztések 3D analogonjai. Feltesszük, hogy kezdetben adott legalább négy olyan pont, amelyek nincsenek egy síkon. A térbeli szerkesztési alaplépések: egy egyenesre nem illeszkedő három pontra illeszthetünk egy síkot; valamint adott ponttal, mint középponttal rendelkező, és egy adott másik ponton, mint felületi ponton áthaladó gömböt rajzolhatunk (gömbön itt gömbfelületet értünk); továbbá három térelem (síkok vagy gömbök) esetén a metszéspontjaik is megszerkeszthetők, amennyiben véges sok pontban metszik egymást (és nem érintők). A többi, síkokra, gömbökre, egyenesekre és körökre épülő térbeli szerkesztési lépés (pl. adott síkkal párhuzamos sík, vagy adott egyenesre merőleges sík szerkesztése, megszerkesztett síkokon történő egyenesekkel és körökkel történő szerkesztési lépések) mind visszavezethetők a szerkesztési alaplépésekre. A geometriai transzformációk is visszavezethetők szerkesztési alaplépésekre, ha nem engedjük meg akármilyen bemeneti paraméter megadását (pl. akármekkora forgatási szöget), hanem csak szerkeszthető mennyiségeket.

Ha csak a térbeli szerkesztési alaplépéseket vizsgáljuk, akkor a három térelem (síkok vagy gömbök) metszéspontjainak a keresése visszavezethető egy egyváltozós, legfeljebb másodfokú egyenlet megoldására. Másrészt, 3 pont által kifeszített sík egyenletének a meghatározásához

lineáris egyenletrendszert kell megoldani, valamint adott középpontú és felszíni pontú gömb implicit egyenletének a felírása még egyszerűbb, így ezekhez a számításokhoz elégséges a 4 alapművelet használata.

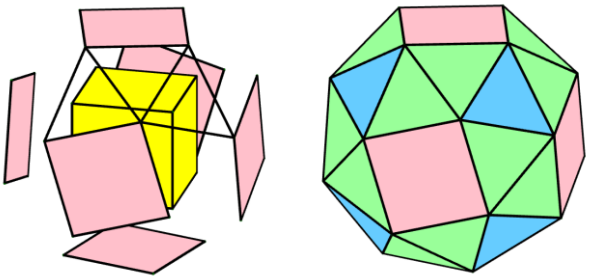
Emiatt ezekre az euklideszi típusú térbeli szerkesztésekre is igaz (ugyanúgy, mint a síkbeli euklideszi szerkesztésekre), hogy pontosan azok a pontok szerkeszthetők meg, melyek koordinátái a szerkesztés kezdetén adott pontok koordinátáinak véges sok, egymásra épülő másodrendű testbővítés alkalmazásával kaphatók meg. Praktikusan ez azt jelenti, hogy minden koordináta kifejezhető a 4 alapművelet és négyzetgyökvonások véges sokszori alkalmazásával.

Másik lehetőség az előbbiek igazolására, ha a Monge-féle két képsíkos ábrázolást tekintjük, amelyet az ábrázoló geometriában előszeretettel alkalmaznak – ebben sík egy egyenesre nem illeszkedő három pontjával, gömb vetületeivel (körök), egyenes vetületeivel, kör leghosszabb és legrövidebb vetületű átfogóival van ábrázolva (ld. [4]). Ebben az ábrázolási rendszerben a két képsíkon szokásos (körzővel és vonalzóval történő) síkbeli szerkesztésekként végezhetők el a térbeli szerkesztési alaplépések: pl. két sík és egy gömb metszéspontjai nem mások, mint a két sík metszésvonalának (amely egy egyenes) egy gömbbel vett metszéspontjai, amelynek szerkesztése jól ismert az ábrázoló geometriában. Mivel a két képsík a 3-dimenziós tér két koordinátasíkjára vett merőleges vetülete, ezért az azokban felhasznált pontok a 3-dimenziós pontok három koordinátájából két koordináta meghagyásával keletkezett pontok, így tényleg ugyanazok a mennyiségek szerkeszthetők meg síkon körzővel és vonalzóval, mint a térbeli euklideszi szerkesztések során.

Ha csak az origó és a tengelykereszt egységpontjai (azaz a koordinátatengelyeken pozitív irányban egységnyi távolságra levő pontok) adottak kezdetben, akkor az előbbiekből következik, hogy minden megszerkeszthető pont mindegyik koordinátája racionális számokat, a 4 alapműveletet és négyzetgyökvonásokat tartalmazó képletekkel kell, hogy leírható legyen (elnevezés az ilyen számra: „szerkeszthető szám”). A szerkeszthető számok olyan valós számok, melyek minimálpolinomja $2^k$ fokú valamely $k$ pozitív egész számra, ld. [6], [9]. (Az $r$ valós szám minimálpolinomja az a legkisebb fokszámú egész együtthatós polinom, melynek az $r$ szám a gyöke.) Fordítva ez nem feltétlenül igaz, azaz, ha egy $r$ valós szám minimálpolinomja $2^k$ fokú valamely $k$ pozitív egész számra, akkor $r$ még nem feltétlenül szerkeszthető. Negyedfokú minimálpolinom esetén annak a köbös rezolvense (amely egy harmadfokú polinom) kiszámítható, és ez alapján eldönthető, hogy $r$ szerkeszthető szám, vagy sem. Magasabb kettőhatvány fokszámú $f$ minimálpolinomra már csak annyit tudunk, hogy $r$ pontosan akkor szerkeszthető, ha $Gal(f:\mathbb{Q}) = 2^k$, valamely $k$ pozitív egész számra, ahol $Gal(f:\mathbb{Q})$ a Galois-csoportja az $f$ egész együtthatós, a racionális számok halmaza felett irreducibilis polinomnak, ld. [6].

Megjegyezzük, hogy a dinamikus geometriai szoftverekben lehet néhány rajzoló parancs, amely elfogad olyan bemeneti paramétert is, amelyet begépelve nem szerkeszthető pontot tudunk konstruálni (pl. forgatni bármilyen szögértékkel lehet bizonyos szoftverekben), vagy akár olyan parancs is, amellyel nem szerkeszthető alakzatot hozhatunk létre (pl. szabályos sokszöget akármilyen csúcsszámmal is létrehozhatunk).

A dinamikus geometriai módszerek alkalmazása során, amikor paraméteres poliédermodellt készítünk az adott poliéder közelítésére, ügyelni kell arra, hogy a megfelelő paraméterérték könnyen beállítható legyen, elvileg tetszőleges pontossággal. Erre az egyetlen paraméter használata biztosítja az ideális lehetőséget, mivel ha a modellben vizsgált, változó élhossz hosszabb és rövidebb is lehet az egységnél, akkor folytonossági meggondolás alapján a modell vizsgált élhossza felveszi valamely paraméterértékre az egységnyi hosszúságot, és ilyenkor intervallumfelező eljárással tetszőleges pontossággal megkaphatjuk ezt a paraméterértéket.



**2. ábra. Pisze kocka modellezése kocka lapjainak kifelé történő eltolásával és forgatásával**

Azonban egynél több paraméter használata esetén már nem ilyen egyszerű a helyzet. A pisze kocka esete mutatja ezt: azt úgy is lehet modellezni, hogy egy kocka mindegyik lapját a testközéppontból a lapközéppontra állított merőleges félegyenes irányában kifelé toljuk egységesen ugyanakkora távolsággal, és e merőleges félegyenesek, mint tengelyek körül ugyananakkora szöggel el is forgatjuk az eltolt lapokat (ugyanolyan irányítással). Megfelelő eltolási távolság, és megfelelő forgatási szög esetén a keletkezett 6 transzformált négyzetlap konvex burka a pisze kocka, amelyet a négyzetlapokon kívül csupa szabályos háromszöglap határol (ld. a 2. ábrát). De a két paraméternek (forgatási szög, eltolási távolság) az értékét jól kitalálni, megközelíteni eléggé nehézkes, és az sem látszik rögtön, hogy léteznek olyan paraméterértékek, amikor minden háromszöglap szabályos. Tehát kedvezőbb csupán egyetlen paraméter használatára szorítkozni (ld. az 5. fejezet végén a pisze kocka egyparaméteres modellezésének leírását).

## 3. Johnson-poliéderek

Szabályos testek azok a konvex poliéderek, melyeknek lapjai egybevágó szabályos sokszögek, és csúcsai „egyformák” (azaz egy csúcsát át tudjuk vinni bármelyik másik csúcsába olyan egybevágósági transzformációval, amely a poliédert önmagába képezi le). Az arkhimédészi testek ennek általánosításai, ezeknél nem követeljük meg, hogy egybevágók legyenek a lapok, különböző oldalszámú szabályos sokszögek is lehetnek (a szabályos sokszöglapokból álló egyenes hasábok és antiprizmák végtelen elemszámú családjait nem szokás az arkhimédészi testek közé sorolni), ld. [2], [3]. A szabályos testek és arkhimédészi testek, szabályos prizmák, szabályos antiprizmák együtt alkotják a konvex uniform poliédereket, melyeknek bármely két csúcsukhoz található a térnek olyan egybevágósága, amelyik az egyik csúcsot átviszi a másikba, miközben a poliédert önmagába képezi le, ld. [1].

A Johnson-poliéderek azok a konvex nemuniform poliéderek, melyeknek minden lapjuk szabályos sokszög (ld. [1], [8], [10]). Hasonlóság erejéig 5 szabályos test létezik, 13 arkhimédészi test van, és 92 Johnson-poliéder (ezek J1-J92 sorszámokkal ellátottak a szakirodalomban, a könnyebb hivatkozás végett).

A szabályos testek, és két kivétellel az arkhimédészi testek is modellezhetők euklidészi szerkesztéssel (és persze a szabályos sokszögoldalakkal rendelkező egyenes hasábok, és az antiprizmák is). A két kivétel a pisze kocka és a pisze dodekaéder.

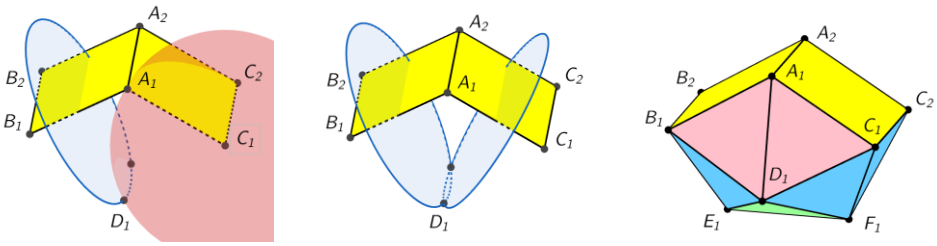
A legtöbb Johnson-poliéder előállítható arkhimédészi testekből, hasábokból és antiprizmákból geometriai alapműveletekkel (csúcsok által meghatározott síkkal való szelés, közös lap mentén egyesítés). A kivételek az ún. elemi Johnson-poliéderek, amelyek a J84-J92 poliéderek. Ezeket szokás a Johnson-poliéderek koronaékszereinek is nevezni, mivel sokkal különlegesebb az alakjuk a többinél. Ezek közül is a J84-86 és J88-J90 Johnson-poliéderek (6 darab) az igazán érdekesek számunkra, mivel a J87 megkapható a J86 poliéderből, ha gúlát

állítunk az egyik négyzetlapjára, a J91 ésJ 92 poliéderek pedig az ikozidodekaéder (arkhimédészi test) megfelelő felületdarabjainak felhasználásával könnyen megszerkeszthetők.

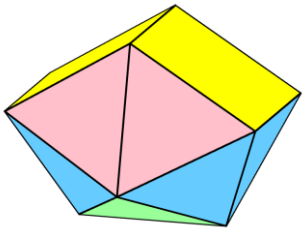
A J84-J86 és a J88-J90 poliéderek, valamint a pisze kocka és a pisze dodekaéder esetén, azok 2 élhosszú megadásakor (ahogy ez a szakirodalomban található) vannak olyan csúcspárok, melyek távolsága olyan, a 4 alapműveletet és esetleg gyökvonást tartalmazó képlettel adható meg, amely tartalmazza egy legalább harmadfokú, a racionális számok testje felett irreducibilis polinom gyökét is, a racionális számok mellett, melyet nem lehet kiejteni a képletből ekvivalens átalakításokkal (ld. [2], [3]). Azokban az esetekben, amikor ennek a polinomnak fokszáma nem kettőhatvány, akkor rögtön adódik, hogy a poliéder nem szerkeszthető (ld. [1]), amikor azonban kettőhatvány (ez a J86 és J88 poliéderek esetén áll fenn), akkor további meggondolások szükségesek ahhoz, hogy belássuk ezeknek a távolságoknak a nemszerkeszthetőségét, és így a hozzájuk tartozó poliédereknek is a nemszerkeszthetőségét. A J86 Johnson-poliéder esetében található két olyan csúcs, melynek távolsága egy negyedfokú $p(x)$ polinom $r_1$ gyökének a kétszerese, és $p(x)$ köbös rezolvensét vizsgálva kijön, hogy annak nincs racionális gyöke, ezért $r_1$ nem szerkeszthető (ld. [8], [9], [10]). A J88 Johnson-poliéder esetében pedig található két olyan csúcs, melynek távolsága egy 16-odfokú $q(x)$ polinom $r_2$ gyökének a négyszerese, amelyről sejthető, hogy nincs szerkeszthető gyöke (már csak azért is valószínű ez, mert ha ilyesmi ismert lenne, akkor a szakirodalomban gyökös képletekkel adnák meg a J88 poliéder csúcsainak a koordinátáit, de jelenleg nem ez a helyzet), ám a szerző jelenleg nem tudja igazolni a nemszerkeszthetőséget, így a J88 Johnson-poliéder nemszerkeszthetőségét csak sejti (ld. [6], [8], [10]).

## 4. A Sphenocorona (J86) modellezése

Ebben a fejezetben leírjuk a J86 poliéder számítógépes modellezésének a lépéseit. A két szomszédos egységnyi élhosszú négyzetlap hajlásszögét választjuk a modell $\alpha$ paraméterének. Megszerkesztünk egy függőleges helyzetű egységnyi élhosszú négyzetet, és azt a felső $A_1A_2$ éle, mint tengely körül elforgatjuk mindkét irányba $\alpha/2$ nagyságú szöggel. A $B_1, A_1, C_1$ csúcsok a két négyzetlap uniójának egyik felén helyezkednek el.




**3. ábra. A sphenocorona (J86) szerkesztése**



**4. ábra. Sphenocorona (J86)**

Szerkesszük meg azt a $D_1$ csúcsot, amely egységnyi távolságra van ettől a három csúcstól. Ez három egységgömb metszéspontja lesz (az a metszéspont a két lehetőség közül, amelyik a konvex poliéder csúcsa lehet). Mivel tipikusan nincs három alakzat metszéspontjára parancs a dinamikus geometriai szoftverekben, először két gömb metszésvonalát, azaz egy körvonalat készítsünk, majd azt messük el a harmadik gömbbel (egy másik alternatíva, hogy egy másik gömbpár metszésvonalát – ami szintúgy kör – is elkészítjük, és a két körvonal metszéspontjai közül választjuk ki a megfelelő $D_1$ pontot). A $B_2, A_2, C_2$ átellenes csúcshármashoz hasonlóan szerkesszük meg a $D_2$ csúcsot. Ezután a $B_2, B_1, D_1$ csúcshármashoz szerkesszük meg azt az $E_1$ csúcsot, amely egységnyi távolságra van ettől a három csúcstól, végül a $D_1, A_1, A_2$ csúcshármashoz szerkesszük meg az ezektől a csúcsoktól rendre egységnyi távolságra levő $F_1$ csúcsot. Ezzel elkészült a poliédermodell 10 csúcsa. Az egyes csúcsok szerkesztésekor szükség esetén az $\alpha$ paraméter értékén (amely a két négyzetlap által bezárt szög) módosítanunk kell, hogy a három gömb metszete ne legyen üres halmaz (azaz két gömb metszésvonala – ami kör – belemessen a harmadik gömbbe). A két lehetséges metszéspont közül mindig azt kell kiválasztanunk a poliéder csúcspontjának, amelyik biztosítja azt, hogy konvex poliédert kapjunk. A szerkesztés menete a 3. ábrán követhető végig, ahol a $D_1$ csúcs kétféleképp történő szerkesztését illusztráltuk, valamint a poliéder csúcsainak a szerkesztésbeli jelölésekkel történő felcímkézése látható. A J86 poliédert pedig a 4. ábra illusztrálja.

A csúcsok szerkesztése közben, akár az egyes csúcsok elkészülte után rögtön elkészíthetjük az ezekre illeszkedő olyan háromszöglapokat, melyeknek az összes csúcsa már meg-szerkesztett. A poliédermodellünk mindegyik éle egységnyi hosszúságú, kivéve az $E_1F_1$ élt, és így a modell mindegyik háromszöglapja szabályos háromszög, kivéve a $D_1E_1F_1$ és $D_2E_1F_1$ háromszöglapokat.

Úgy is felfoghatjuk ezt a modellt, hogy nem egy egész poliéderfelületet tekintünk, hanem a $D_1E_1F_1$ és $D_2E_1F_1$ lapokat és az $E_1F_1$ élt kivesszük a modell poliéderfelületéből: ekkor a virtuális modellünk megfelel egy olyan valóságos modellnek, amelyben a két négyzetlap és a maradék tíz háromszöglap merev lemezek, és a közös éleiknél csuklósan csatlakoznak egymáshoz. Ennek a csuklós szerkezetnek a konvexitás feltétele melletti lehetséges mozgásait adja a paraméteres modellünk.

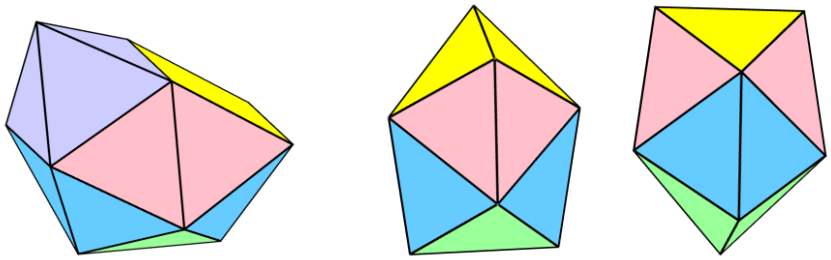
Az $\alpha$ paraméter értékének változtatásakor a modell alakja változik, méghozzá úgy, hogy amikor $\alpha$ értéke növekszik, akkor az $E_1F_1$ élhossz is növekszik ($\alpha$ értéke persze csak egy bizonyos intervallumon belül változhat, hogy a korábban szerkesztett csúcspontok, melyek rendre három gömb metszéspontjai, létezzenek). Mivel van olyan $\alpha$ paraméterérték, melyre az $E_1F_1$ élhossz egységnél rövidebb, és van olyan $\alpha$ paraméterérték is, melyre az $E_1F_1$ élhossz egységnél hosszabb, ezért folytonossági meggondolások alapján kell, hogy legyen (egyetlen) olyan $\alpha$ paraméterérték, melyre $E_1F_1$ élhossza pontosan egységnyi. Így $\alpha$ értékének egy jó közelítését megkereshetjük intervallumfelezési eljárással úgy, hogy az $E_1F_1$ élhossz az egységtől legfeljebb adott hibakorláton belül essen, persze a szoftveres korlátokat is figyelembe véve.

A paraméteres poliédermodellt GeoGebrával és Cabri 3D szoftverrel is elkészítettük (ld. [5], [7]). Mindkét szoftvernél meg lehetett mérni az $E_1F_1$ élhosszt nagy pontossággal. Az $\alpha$ szög értékét GeoGebra esetében csúszkával vettük fel, ahol a lépésköz befolyásolta az egérrel történő grafikus paraméterbeállítás finomságát, de parancssorban bármilyen paraméterértéket fel lehetett vinni, így az intervallumfelezésnél nagy pontosságot (14 tizedesjegynyit) lehetett elérni nem túl sok lépésben. A Cabri 3D szoftver esetében egy köríven mozgó pont befolyásolta a szög nagyságát, itt 2 tizedesjegynyi pontosságot lehetett elérni.

## 5. További nemszerkeszthető Johnson-poliéderek modellezése

Ebben a fejezetben vázlatosan ismertetjük a J84, J85, J87, J89, J90 nemszerkeszthető Johnson-poliéderek számítógépes modellezésének menetét, valamint a J89 Johnson poliéder (amely valószínűleg nem szerkeszthető, amint azt a 3. fejezetben részleteztük) számítógépes modellezésének a menetét is. Ezeket a modelleket is GeoGebrával és Cabri 3D szoftverrel készítettük el (ld. [5], [7]).

A kibővített sphenocorona (J87) modellje (ld. 5. ábrát) úgy készül, hogy a sphenocorona (J86) poliédermodell egyik négyzetlapját 4 darab szabályos háromszöglappal kicseréljük úgy, hogy konvex poliédert kapjunk (szemléletesen: egy négyzet alapú szabályos gúlával kiegészítjük a J86 poliéder modelljét).

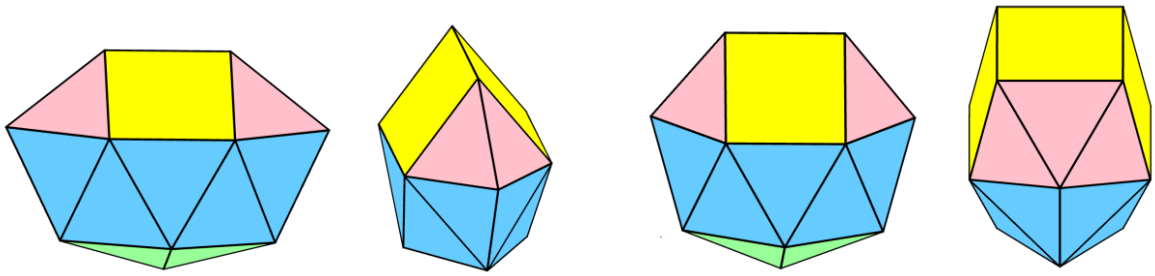


**5. ábra. Kibővített sphenocorona (J87) egy nézete, és pisze disphenoid (J84) két nézete**

Egy konvex poliéder két élét antipodálisnak (más szóval „átellenesnek") nevezzük, ha létezik két olyan párhuzamos sík, melyek közrezárják a poliédert, a belsejébe nem metszenek bele, és a két élből egyet-egyet a párhuzamos síkpár különböző elemei tartalmaznak.

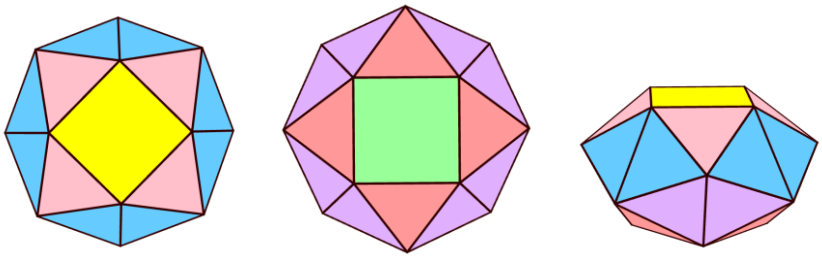
A pisze disphenoid (J84) paraméteres modelljében két szomszédos egységnyi élhosszú szabályos háromszöglap ( $A_1A_2B_1$ és $A_1A_2C_1$ ) hajlásszögét választjuk a modell $\alpha$ paraméterének. A modellben a két háromszöglap közös $A_1A_2$ éle lesz az egyik olyan él, amely 4 fokszámú csúcsokat köt össze (azaz 4-4 él fut össze az él végpontjaiban). A többi csúcsot (amelyek a $D_1, D_2, E_1, F_1$ pontok) gömbhármasok metszéspontjaiként szerkeszthetjük meg, a J86 poliéder modelljének ugyanilyen jelölésű csúcsaihoz hasonlóan. Ebben a modellben az élek közül egyedül az $A_1A_2$ éllel átellenes $E_1F_1$ él hossza változó. Az 5. ábrán két nézete is látható a J84 poliédernek (a csúcsok felcímkézése helyett a lapok színkódolását választottuk: sárga, rózsaszín, kék sorrendben készíthetők el a lapok az újabb és újabb csúcsok megszerkesztése után, a végén a zöld lapok közrezárt élének hossza függ az $\alpha$ paramétertől, azt kell beállítani megfelelően a J84 Johnson-poliéder modelljének elkészítéséhez). A soron következő Johnson-poliéderek ábráinál is hasonló színkódolást használtunk.

A sphenomegacorona (J88) paraméteres modellje nagyon hasonlón készül a J86 poliéderéhez: a két szomszédos egységnyi élhosszú négyzetlap hajlásszögét választjuk a modell $\alpha$ paraméterének. A $B_1, A_1, C_1$ és $B_2, A_2, C_2$ csúcsok ugyanúgy a négyzetlapok csúcsai, és$D_1, D_2$ ugyazon gömbhármasok metszéspontjai. A $B_1, D_1, C_1$ , és $B_2, D_2, C_2$ csúcsokhoz tartozó gömbhármasok metszéspontjai legyenek $E_1$ és $E_2$ . A $D_1, B_1, B_2$ , és $D_1, C_1, C_2$ csúcsokhoz tartozó gömb-hármasok metszéspontjai legyenek $F_1$ és $G_1$. Az élek közül egyedül az $A_1A_2$ éllel átellenes $F_1G_1$ él hossza változó a modellben.



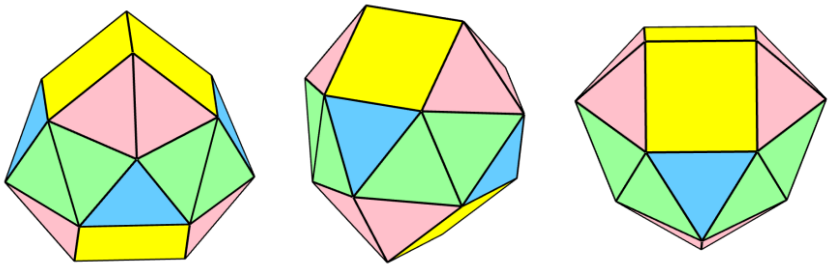
**6 ábra. Sphenomegacorona (J88) két nézete, és hebesphenomegacorona (J89) két nézete**

A hebesphenomegacorona (J89) paraméteres modelljében három egységnyi élhosszú négyzetlap csatlakozik egymáshoz, a középsővel zárjon be a két szélső $\alpha$ szöget. A többi csúcs megfelelő gömbhármasok metszéspontjaként állítható elő. Az élek közül egyedül a középső négyzetlappal párhuzamos, négyzetlapokra nem illeszkedő él hossza változó a modellben.



**7. ábra. Pisze négyzetes antiprizma (J85) három nézete**

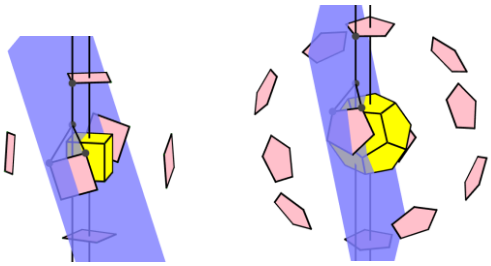
A pisze négyzetes antiprizma (J85) modelljében egy egységnyi élhoszú négyzetlapjával $\alpha$ szöget zárjon be a hozzá közös éllel csatlakozó 4 darab szabályos háromszöglap mindegyike. A többi csúcs megfelelő gömbhármasok metszéspontjaként állítható elő. Az átellenes négyzetlap csúcsai kerülnek utoljára megszerkesztésre, e négyzetlap oldalhossza változó, a többi él egységnyi hosszú a modellben.



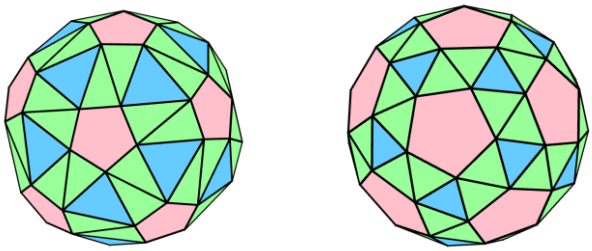
**8. ábra. Disphenocingulum (J90) három nézete**

A disphenocingulum (J90) két, egységnyi hosszú négyzetlap-párja $\alpha$ szöget zárjon be, majd a két négyzetlap mindegyikéhez csatlakozó élek átellenes csúcsai kerüljenek megszerkesztésre, végül ezt a két különálló részt úgy toljuk el a közös szimmetriatengelyük irányában, hogy a négyzetlapokra illeszkedő és a két részt összekötő (a 8. ábrán kék) háromszögek szabályosak legyenek. Ekkor marad 4 egyenlő hosszú él a modellben, amely változó hosszú.

Végezetül megjegyezzük, hogy a pisze kocka és pisze dodekaéder arkhimédészi testek úgy modellezhetők egy paraméteres modellel, hogy adott forgatási szög esetén megszerkeszthető az az eltolási távolság, hogy az eltolt, majd elforgatott négyzet- ill. ötszöglapokat egyenlő hosszúságú élek kössék össze (ennek megszerkesztéséhez az egyik elforgatott lap élének felezőmerőleges síkját kell elmetszeni egy szomszédos elforgatott lap megfelelő csúcsára illesztett eltolási vektor irányú egyenessel).



**9. ábra. Pisze kocka és pisze dodekaéder modelljének szerkesztése**



**10. ábra. Pisze dodekaéder paraméteres modellje a paraméter értékének beállítása előtt és után**

## 6. Oktatási tapasztalat

Az Óbudai Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Karán oktatott „Számítógépes térgeometriai modellezés” kurzus egyik témaköre a poliéderek modellezése. A tapasztalatok alapján a hallgatóknak megfelelő ismereteik vannak az alaptestekről (hasáb, gúla) és a szabályos testekről. De további konvex és nem konvex poliéderekről, vagy azok tulajdonságairól az ismereteik elég hiányosak. A geometriai módszereket szívesen alkalmazzák számítógépes modellezés során, és kedvelik a mozgó vagy mozgatható modelleket. Amint a hallgatók rájöttek, hogy hogyan lehet három gömb metszéspontjaként újabb és újabb csúcsok megszerkesztésével elkészíteni az itt ismertetett nem négyzetes forgásszimmetriájú paraméteres poliédermodelleket, szívesen dolgozták ki ezeket. Elnyerte a tetszésüket, hogy mindenféle matematikai számítások nélkül, elég pontos számítógépes modellt lehetett így készíteni ezekről az érdekes alakú Johnson-poliéderekről.

## Köszönetnyilvánítás.

Szeretném megköszönni Németh Lászlónak, hogy lehetőséget biztosított ennek a kéziratnak a megjelentetéséhez a Dimenziók – Matematikai közlemények 2020-as kötetében.

## Irodalomjegyzék

[1] Alison, N., Polyhedra Viewer, https://polyhedra.tessera.li/
[2] Archimedean solid, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid
[3] Archimedean Solid, Wolfram Mathworld, https://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html
[4] **Bancsik Zs., Lajos S., Juhász I.**, Ábrázoló geometria kezdőknek, Debreceni Egyetem, 2004., https://gyires.inf.unideb.hu/mobiDiak/Juhasz-Imre/Abrazolo-geometria-kezdoknek/abrazologeometria.pdf
[5] Cabri 3D, https://cabri.com/en/enterprise/cabri-3d/
[6] **Cox, D. A.**, Galois Theory, Wiley, Hoboken, NJ, 2012.
[7] GeoGebra, https://www.geogebra.org/
[8] Johnson solid, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson_solid
[9] **Kovács, Z.**, Geometria szerkesztések I. (Euklidészi szerkesztések), Debreceni Egyetem Matematikai és Informatikai Intézete, Debrecen (2001), pp. 23., http://zeus.nyf.hu/~kovacsz/szerk.pdf
[10] The Johnson solids, Eusebeia, http://eusebeia.dyndns.org/4d/johnson

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
VIII. kötet, 2020


doi:10.20312/dim.2020.03

# Az általánosított hiperbolikus kvaternióalgebrákról

**Péntek Kálmán**
ELTE SEK TTMK Savaria Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban először Macfarlane klasszikus M hiperbolikus kvaternióit általánosítjuk és megkonstruáljuk az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ nem kommutatív és nem asszociatív algebráját. Minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf egy teljes mátrixalgebra részalgebrájával, de az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algbrája nem asszociatív. E probléma megoldására Zorn, M.A. definiálta a vektor-mátrix struktúrákat a split (hasított) oktoniók algebrájának leírására 1933-ban. A dolgozat utolsó fejezetében megkonstruáljuk az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ általánosított hiperbolikus kvaterniók általánosított vektor-mátrix reprezentációját.

ABSTRACT. In the paper at first we generalize Macfarlane's classical hyperbolic quaternions M, and we construct the non commutative and non associative algebras of generalized hyperbolic quaternions $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$. Any finite dimensional associative algebra is algebrically isomorphic to a subalgebra of a total matrix algebra, but the algebras of generalized hyperbolic quaternions $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined the vector-matrix structures for description split octonions algebra in 1933. In the last section of the paper we construct the generalized vector-matrix representation of generalized hyperbolic quaternions $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$.

## 1. Bevezetés

Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ír matematikus, fizikus és csillagász 1833-ban dolgozta ki a klasszikus komplex számok $\mathbb{C}$ algebrájának a rendezett valós számpárokon alapuló felépítését (*HAMILTON 1834,1837*). A komplex számok használata hatékony és elegáns módszert kínált síkgeometriai problémák analitikus megoldására. Hamilton ezért kísérletezett a rendezett valós számhármasok algebrájának kidolgozásával, ettől remélte ugyanis a síkbeli esettel analóg módon a térgeometriai feladatok eredményes, analitikus módszerrel történő tárgyalását.

Csak 1843-ban ismerte fel, hogy célját rendezett valós számnégyesek segítségével érheti el és sikeresen meg is alkotta a $\mathbb{H}$ valós kvaterniók nem kommutatív, de asszociatív algebráját (*HAMILTON 1844,1847*). Élete hátralevő részét a kvaternióelmélet minél teljesebb kidolgozásának szentelte (*ROSENFELD 1997, WARD 1997*).

A valós kvaterniók algebráját Leonard Eugene Dickson (1874 – 1954) amerikai matematikus általánosította 1912-ben (*DICKSON 1912*), vélhetően Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882 – 1948) skót származású amerikai matematikus inspirációjára, és bevezette egy test feletti $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióalgebra fogalmát (*JAFARI – YAYLI 2015*). E struktúra részletes magyarnyelvű bemutatását találhatjuk pl. Péntek K. dolgozatában (*PÉNTEK 2018*)

A szintén skót származású amerikai matematikus és fizikus Alexander Macfarlane (1851 – 1913) 1891-ben alkotta meg Hamilton klasszikus kvaternióinak mintájára a hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}$ nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját (*MACFARLANE 1900*).

Tudjuk, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a megfelelően választott teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával, vagyis minden ilyen algebrának megadhatjuk a mátrix-reprezentációját. A nem asszociatív algebrák azonban nem reprezentálhatók mátrixokkal. Max August Zorn (1906 – 1993) német származású amerikai matematikus 1933-ban viszont sikeresen reprezentálta a split (hasított) oktoniók nem kommutatív és nem asszociatív algebráját vektor-mátrixok segítségével (*ZORN 1931, 1933, KARATAS – HALICI 2018*).

Ebben a dolgozatban a Dickson által alkalmazott eljárással analóg módon általánosítjuk a klasszikus hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}$ algebráját és értelmezzük az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ struktúráját, majd megvizsgáljuk algebrai tulajdonságait. A dolgozat fő eredményeként pedig megadjuk az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ nem kommutatív és nem asszociatív algebrának alkalmas vektor-mátrixokkal történő reprezentációját.

## 2. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók

### 2.1. A Macfarlane-féle klasszikus hiperbolikus kvaterniók

Legyen $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ a valós számok teste a 0 összeadási és 1 szorzási neutrális elemmel. Ekkor az

$$\mathbb{M} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}; i, j, k \notin \mathbb{R}\} \tag{1}$$

alakú kifejezéseket a klasszikus hiperbolikus kvaterniók halmazának nevezzük, ha az $\{1, i, j, k\}$ kvaternióegységek eleget tesznek az alábbi szorzási szabályoknak:

$$\begin{gathered} 1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k \\ i^2 = 1, \quad j^2 = 1, \quad k^2 = 1 \\ i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = j. \end{gathered} \tag{2}$$

Az $\mathbb{M}$ halmazban értelmezhetünk skalárral való szorzást, összeadást és (2) felhasználásával a szokásos algebraszerkesztés homogén és disztributív szabályait követve szorzást is (*KANTOR – SZOLODOVNYIKOV 1985*) a következő módon. Tetszőleges

$$r \in \mathbb{R}, \ \ a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}$$

esetén a skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k \tag{3}$$

az összeadás:

$$\begin{gathered} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k \end{gathered} \tag{4}$$

a szorzás:

$$\begin{gathered} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a \cdot b' + b \cdot a' + c \cdot d' - d \cdot c') \cdot i + \\ (a \cdot c' - b \cdot d' + c \cdot a' + d \cdot b') \cdot j + \\ (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k \end{gathered} \tag{5}$$

A hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}$ halmaza a rajta értelmezett (3), (4) és (5) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ valós test felett.

A hiperbolikus kvaterniókat bemutató első dolgozat 1900-ban látott napvilágot az alkotó (*MACFARLANE 1900*) tárgyalásában, de napjainkban is fontos eredményekkel gazdagodik a téma szakirodalma (*KÖSAL 2018*).

## 2.2. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók

L. E. Dickson klasszikus kvaterniók esetén alkalmazott módszerét követve (*JAFARI-YAYLI 2015*) most általánosítjuk a hiperbolikus kvaterniók fogalmát és megvizsgáljuk az így nyert struktúra legfontosabb algebrai tulajdonságait.

Az

$$\mathbb{M}_{\alpha\beta} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : \ a, b, c, d \in \mathbb{R};\ i, j, k \notin \mathbb{R}\} \tag{6}$$

alakú kifejezéseket az általánosított hiperbolikus kvaterniók halmazának nevezzük akkor és csakis akkor, ha az $\{1, i, j, k\}$ általánosított kvaternióegységek között teljesülnek az alábbi szorzási összefüggések:

$$\begin{gathered} 1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k \\ i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta, \quad k^2 = \alpha \cdot \beta \\ i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = \beta \cdot i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = \alpha \cdot j, \end{gathered} \tag{7}$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ rögzített valós paraméterek.

Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ halmazban műveleteket értelmezhetünk, skalárral való szorzást és összeadást, továbbá a (7) alapján az algebraszerkesztés szabályait alkalmazva még egy szorzást is a következő módon. Tetszőleges

$$r \in \mathbb{R}, a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$$

esetén a skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k \tag{8}$$

az összeadás:

$$\begin{gathered} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k \end{gathered} \tag{9}$$

a szorzás:

$$\begin{gathered} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a \cdot a' + \alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + \\ (a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot i + \\ (a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot j + \\ (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k \end{gathered} \tag{9}$$

**1. Tétel.** Az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ halmaza a rajta értelmezett (8),(9) és (10) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

**Megjegyzés**. A (7) összefüggés 3. sorából közvetlenül látható, hogy a (10) szorzás nem kommutatív és nem asszociatív. Valóban, pl. $i \cdot j = k, j \cdot i = -k$, tehát $i \cdot j \neq j \cdot i$, így a szorzás nem kommutatív általában. Másrészt, pl. $(i \cdot j) \cdot j = k \cdot j = -\beta \cdot i, i \cdot (j \cdot j) = i \cdot \beta = \beta \cdot i$, ezért $(i \cdot j) \cdot j \neq i \cdot (j \cdot j)$, így a szorzás nem asszociatív általában.

Speciálisan, ha $\alpha = \beta = 1$, akkor éppen $\mathbb{M}_{\alpha\beta} = \mathbb{M}$ teljesül.

**Definició**. A $q := a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ *konjugált*ján a $\bar{q} = a - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemet értjük.

**2. Tétel.** Ha $r \in \mathbb{R},\ q, q' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor a konjugált képzésére érvényesek a következő tulajdonságok:

| | | |
|---|---|---|
| (a) | $\bar{\bar{q}} = q$ | involutív, |
| (b) | $\overline{r \cdot q} = r \cdot \bar{q}$ | homogén, |
| (c) | $\overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q'}$ | additív, |
| (d) | $\overline{q \cdot q'} = \bar{q'} \cdot \bar{q}$ | anti-multiplikatív. |

**3. Tétel.** Ha $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor érvényes a

$$q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a^2 - \alpha \cdot b^2 - \beta \cdot c^2 - \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \in \mathbb{R}$$

összefüggés.

**Definíció.** A $q := a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elem *normá*ján a

$$N(q) := a^2 - \alpha \cdot b^2 - \beta \cdot c^2 - \alpha \cdot \beta \cdot d^2$$

valós számot értjük.

**4. Tétel.** Ha $q, q' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ tetszőleges elemek, akkor

(a) $N(q) = N(\bar{q})$,

(b) $N(q \cdot q') \neq N(q) \cdot N(q')$ általában.

**Megjegyzés.** A normafüggvény általában nem multiplikatív, ugyanis pl. $N(i \cdot j) = N(k) = -\alpha \cdot \beta$, másrészt $N(i) \cdot N(j) = (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$, tehát $N(i \cdot j) \neq N(i) \cdot N(j)$.

**Definíció.** Ha $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = a' + b' \cdot i + c \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor e két elem *skaláris szorzat*án a

$$\langle q, q' \rangle := a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

**5. Tétel.** A skaláris szorzat képzése egy $\mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris leképezés, tetszőleges $r \in \mathbb{R},\ q, q', q'' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ esetén

| | | |
|---|---|---|
| (a) | $\langle q, q' \rangle = \langle q', q \rangle$ | kommutatív, |
| (b) | $\langle r \cdot q, q' \rangle = \langle q, r \cdot q' \rangle = r \cdot \langle q, q' \rangle$ | homogén, |
| (c) | $\langle\ q, q' + q'' \rangle = \langle q, q' \rangle + \langle q, q'' \rangle$ | balról disztributív, |
| (d) | $\langle q + q', q'' \rangle = \langle q, q'' \rangle + \langle q', q'' \rangle$ | jobbról disztributív. |

Látható, hogy egy általánosított hiperbolikus kvaternió normája a skaláris szorzatból származtatható, hiszen ha $q \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor a norma és a skaláris szorzat fenti értelmezése szerint $N(q) = \langle q, q \rangle$ teljesül.

**6. Tétel.** Tetszőleges $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elempár skaláris szorzata előállítható a következő

$$\langle q, q' \rangle = (a, b, c, d) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$

alakban.

**Megjegyzés.** A 6.T. előállításából jól látható, hogy az $\alpha = \beta = 1$ esetén adódó klasszikus $\mathbb{M}$ hiperbolikus kvaterniók egy Minkowski metrikájú algebrát alkotnak.

**Definíció.** Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathcal{A}$ egy *alternáló algebra* akkor és csakis akkor, ha bármely $x, y \in \mathcal{A}$ esetén teljesül az $(x \cdot x) \cdot y = x \cdot (x \cdot y)$ és az $(x \cdot y) \cdot y = x \cdot (y \cdot y)$ azonosság.

**7. Tétel.** Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algebra nem alternáló.

BIZONYÍTÁS. Egyrészt $(i \cdot i) \cdot j = \alpha \cdot j$ és $i \cdot (i \cdot j) = i \cdot k = -\alpha \cdot j$, így $(i \cdot i) \cdot j \neq i \cdot (i \cdot j)$. Másrészt $(i \cdot j) \cdot j = k \cdot j = -\beta \cdot i$ és $i \cdot (j \cdot j) = i \cdot \beta = \beta \cdot i$, ezért $(i \cdot j) \cdot j \neq i \cdot (j \cdot j)$. □

**Definíció.** Az $\mathbb{R}$ feletti, $e$ neutrális elemes $\mathcal{A}$ egy kvadratikus algebra akkor és csakis akkor, ha bármely $x \in \mathcal{A}$ estén létezik olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $x^2 = \lambda \cdot e + \mu \cdot x$ előállítás adható meg.

**8. Tétel.** Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ egy kvadratikus algebra.

BIZONYÍTÁS. Ha $x = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ tetszőleges, akkor az $x^2 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ egyenlet mindig megoldható a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ismeretlenekre, s a megoldás:

$$\lambda = -a^2 + \alpha \cdot b^2 + \beta \cdot c^2 + \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \quad \text{és} \quad \mu = 2 \cdot a,$$

ami az állítást bizonyítja. □

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a fenti tételben szereplő $x \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemre teljesül $N(x) = -\lambda$, továbbá $t(x) = \mu$, ahol $t(x)$ éppen az $x \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemhez hozzárendelt vektor-mátrix nyoma (lásd alább). Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algebra kvadratikus voltát leíró összefüggés így az $x^2 = -N(x) + t(x) \cdot x$, vagyis az $x^2 - t(x) \cdot x + N(x) = 0$ alakot ölti.

**Megjegyzés.** Jól ismert eredmény, hogy minden véges dimenziós alternáló algebra kvadratikus (*EBBINGHAUS ET AL. 1991*), így a fentiek szerint az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ egy olyan $\mathbb{R}$ feletti 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem asszociatív algebra, amelyik kvadratikus, de nem alternáló algebra.

## 2.3. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók vektorgeometriája

**Definíció.** A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ tetszőleges általánosított hiperbolikus kvaternió *valós részén* (skalár rész) az

$$S(q) := a \in \mathbb{R}$$

valós számot, *képzetes részén* (vektor rész) pedig a

$$V(q) := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{R}^3$$

vektort értjük.

**Definíció.** Az $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) := \{0 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ alakú általánosított hiperbolikus kvaterniókat tiszta képzetes kvaternióknak nevezzük.

Legyen $q := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ , $q' := b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ két tiszta képzetes hiperbolikus kvaternió, akkor szorzatuk

$$q \cdot q' := -(-\alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + [(c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k]$$

lesz, ez indokolja a következő kettős definíciót.

**Definíció.** Két tiszta képzetes hiperbolikus kvaternió *skaláris szorzat*án a

$$q \circ q' := -\alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$$

valós számot, *vektoriális szorzat*án pedig a

$$q \times q' := (c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k \in \mathbb{R}^3$$

vektort értjük.

**Megjegyzés.** Ekkor tehát érvényes a $q \cdot q' = -q \circ q' + q \times q'$ összefüggés. A tiszta képzetes hiperbolikus kvaterniók $\circ$ skaláris szorzata az általános hiperbolikus kvaterniók $\langle\ ,\ \rangle$ skaláris szorzatának leszükítése, vagyis ha $q, q' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$, akkor $q \circ q' = \langle q, q' \rangle$.

**9. Tétel.** A $\circ\colon Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \times Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \to \mathbb{R}$ skaláris szorzat egy szimmetrikus bilineáris leképezés, tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ esetén

| | | |
|---|---|---|
| (a) | $q \circ q' = q' \circ q$ | kommutatív, |
| (b) | $(r \cdot q) \circ q' = q \circ (r \cdot q') = r \cdot (q \circ q')$ | homogén, |
| (c) | $q \circ (q' + q'') = q \circ q' + q \circ q''$ | balról disztributív, |
| (d) | $(q + q') \circ q'' = q \circ q'' + q' \circ q''$ | jobbról disztributív. |

**10. Tétel.** Az $\times\colon Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \times Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \to Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ vektoriális szorzat egy anti-szimmetrikus bilineáris leképezés, tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ esetén

(a) $q' \times q = -q \times q'$ anti-kommutatív,
(b) $(r \cdot q) \times q' = q \times (r \cdot q') = r \cdot (q \times q')$ homogén,
(c) $q \times (q' + q'') = q \times q' + q \times q''$ balról disztributív,
(d) $(q + q') \times q'' = q \times q'' + q' \times q''$ jobbról disztributív,
(e) $q \times q = \mathbf{0}$,

ahol $\mathbf{0} := 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ a zérusvektor.

**Megjegyzés.** $(i \times j) \times j = k \times j = -\beta \cdot i$ és $i \times (j \times j) = i \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ezért $(i \times j) \times j \neq i \times (j \times j)$, vagyis a vektoriális szorzat az $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ halmazban általában nem asszociatív.

**Definíció.** Ha $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ , akkor ezen elemek ilyen sorrendben képezett vegyesszorzatán a

$$qq'q'' := (q \times q') \circ q'' \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

**11. Tétel.** Ha $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$, akkor

(a) $qq'q'' = -\alpha \cdot \beta \cdot det(q, q', q'')$,

(b) $qq'q = (q \times q') \circ q = 0$,

(c) $(q \times q') \circ q'' = q \circ (q' \times q'')$ (invariancia tulajdonság).

**Következmény.** Ha $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$, akkor $qq'q'' = q'q''q = q''qq'$ (felcserélési tulajdonság).

**12. Tétel.** (GRASSMANN – azonosság, kifejtési tétel). Bármely $a, b, c \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ esetén érvényesek:

$$(a \times b) \times c = -[(a \circ c) \cdot b - (b \circ c) \cdot a],$$
$$a \times (b \times c) = -[(a \circ c) \cdot b - (a \circ b) \cdot c].$$

**13. Tétel.** (JACOBI – azonosság.) Bármely $a, b, c \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ elemekre érvényesek:

$$(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = \mathbf{0},$$
$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = \mathbf{0}.$$

**14. Tétel.** (LAGRANGE – azonosság.) Bármely $a, b, c, d \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ elemek esetén érvényes:

$$(a \times b) \circ (c \times d) = -\begin{vmatrix} a \circ c & a \circ d \\ b \circ c & b \circ d \end{vmatrix}.$$

Speciálisan, ha $a = c, b = d$, akkor igaz a

**15. Tétel.** (Speciális LAGRANGE – azonosság.) Bármely $a, b \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ elemekre érvényes:

$$(a \times b) \circ (a \times b) = -[(a \circ a) \cdot (b \circ b) - (a \circ b) \cdot (a \circ b)].$$

Az $\times$ vektoriális szorzás művelet 10. Tétel. (e) tulajdonsága, e művelet nem asszociatív tulajdonsága és a 13. Tétel első összefüggése alapján érvényes a következő

**16. Tétel.** Az $\{Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}), +, \times\}$ algebrai struktúra egy LIE algebra.

## 2.4. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók vektor-mátrix reprezentációja

**Definíció.** A $Z(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{11}, A_{22} \in \mathbb{R},\ A_{12}, A_{21} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ alakú hipermátrixok halmazát *Zorn* – féle vektor-mátrixoknak nevezzük. A $Z(\mathbb{R})$ halmazban műveleteket értelmezünk a következő módon. Ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in Z(\mathbb{R})$, akkor
a skalárral való szorzás:

$$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

az összeadás:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

a szorzás:

$$A * B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} + A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} - A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

E műveletek értelmezése során az $\mathbb{R}$, illetve az $\mathbb{R}^3$ műveleteit, továbbá az $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ struktúra $\circ$ skaláris szorzása és $\times$ vektoriális szorzása műveleteit használtuk fel.

**17. Tétel.** A $Z(\mathbb{R})$ halmaz a (11), (12) és (13) műveletekkel egy 8-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett.

**Definíció.** Jelölje $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ azon speciális alakú Zorn-féle vektor-mátrixok halmazát, amelyre teljesülnek az

$$A_{11} = A_{22} = a \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad A_{12} = -A_{21} := (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$$

összefüggések.

**18. Tétel.** A $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ halmaz a (11), (12) és (13) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív részalgebrát alkot a $Z(\mathbb{R})$ algebrában.

**19. Tétel.** Az

$$F: \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R}),$$
$$a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \mapsto \begin{pmatrix} a & (b, c, d) \\ -(b, c, d) & a \end{pmatrix}$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, vagyis egy bijektív és művelettartó leképezés, amelyre tetszőleges $r \in \mathbb{R}, q, q' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ esetén teljesül:

(a) $F(r \cdot q) = r \cdot F(q)$ homogén,
(b) $F(q + q') = F(q) + F(q')$ additív,
(c) $F(q \cdot q') = F(q) * F(q')$ multiplikatív

összefüggés.

A fenti tétel az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algebra vektor-mátrix reprezentációja.

## Irodalomjegyzék


[1] **Dickson, L. E**., Linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 13(1), (1912) 59-73.
[2] **Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K. Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R,** Numbers. Springer, 1991.
[3] **Hamilton, W. R.,** On Conjugate function, or algebraic Couples. British Association Report, Edinburg. (1834) 519-523.
[4] **Hamilton, W. R.,** Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a Preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. Transactions of the Royal Irish Academy, 17(1), (1837) 293-422.
[5] **Hamilton, W. R.,** On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy, 2 (1844) 424-434.
[6] **Hamilton, W. R.,** On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy, 3 (1847) 1-16.
[7] **Jafari, M., Yayli, Y.,** Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 64(1), (2015) 15-27. doi:10.1501/Commua1_0000000724.
[8] **Kantor, I. L., Szolodovnyikov, A. Sz.,** Hiperkomplex számok. Gondolat, Bp., 1985.
[9] **Karatas, A., Halici, S.**, Vector Matrix Representation of Octonions and Their Geometry. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 67(1), (2018) 161-167. doi:10.1501/Commua1_0000000839
[10] **Kösal, I. A.** A note on hyperbolic quaternions. Universal Journal of Mathematics and Applications, I(3), (2018) 155-159.
[11] **Macfarlane, A.** Hyperbolic Quaternions. Proceedings of the Royal Society at Edinburgh. vol. 23. (2018) 169 – 180 +figures plate.

[12] **Péntek, K.,** Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók, Matematikai Közlemények, VI. (2018) 25-30. doi:10.20312/dim.2018.03
[13] **Rosenfeld, B.,** Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1997. doi:10.1007/978-1-4757-5325-7
[14] **Ward, J. P.**, Quaternions and Cayley Numbers. Spinger Science, Bussines Media B.V, 1997.
[15] **Zorn M.A.** Theorie der alternativen Ringe. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg, (1931) 123-147.
[16] **Zorn, M. A.,** Alternativkörper und quadratische Systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg, (1933) 395-402.

doi:10.20312/dim.2020.04

# Bikvadratikus interpoláció TIN felületmodellben

**Kalmár János, Gribovszki Katalin, Benedek Judit**
MTA CSFK GGI
kalmar55@gmail.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A háromszögbázisú felületmodellek teszik lehetővé az eredeti mérési pontokra illeszkedő interpolációt, ha az alappontok nem raszter mentén helyezkednek el a síkon, hanem szabálytalanul, véletlenszerűen. Ha csak az alappontokban ismert magasságot vesszük figyelembe, akkor kizárólag a háromszögenkénti síkillesztés jöhet szóba, mint folytonos véges elem interpoláció. Lokális szélsőérték (minimum vagy maximum) pontok keresésekor a síkillesztés csak az alappontokban találhat extrémumot, a lefedő háromszögeken belül nem. Ezen javítandó olyan háromszögenként bikvadratikus véges elem felületinterpolációt dolgoztunk ki, mely nemcsak az alappontokra illeszkedik, hanem bizonyos parciális deriváltakra is, és folytonos a határoló éleken. A megvalósításhoz kétféle becslést használtunk a parciális deriváltak kiszámításához.

ABSTRACT. Biquadratic interpolation in TIN (triangulated irregular network) surface model – Triangle-based surface model allows interpolation to the original measurement points in case they are not on the raster, but the measured base points are randomly (irregularly) distributed. If in the modelling only the elevation of base points are taken into account, then the interpolation surface can be generated by triangular element interpolation exclusively. It is a well-known fact that local extrema for the surface generated by triangular faces are located at the vertices of triangular faces. In order to improve the position of the local extrema a smooth surface have to be generated with a surface-fitting technique, using biquadratic interpolation. The smooth fitting of biquadratic local surfaces along the edges is realised using an adequate estimation for the partial derivatives at the base points. Here is a short summarization about the article in English language.

## 1. Bevezetés

Szabálytalan alappont-hálózat esetén háromszögbázisú (TIN) modelleket [1] használunk felület-interpolációra, ami alapja pl. a felszín-ábrázolásnak [2], a terület, illetve térfogatszámításoknak [3], a lejtési irány meghatározásának [4]. Az alappontok számának ésszerű csökkentésével [5] kisebb tár és időigényű – de kevésbé pontos - TIN modellek is levezethetők [6], illetve az egyszerűbb kezelhetőség érdekében rácsbázisú modellre is áttérhetünk [7].

A legegyszerűbb TIN bázisú véges-elem approximáció a síkillesztés ($z = a_0 + a_1 x + a_2 y$), ahol a három csúcspontban csak a magassági illeszkedést írjuk elő a paraméterek $(a_0, a_1, a_2)$ meghatározásához. A másodfokú (bikvadratikus) polinomnak hat ((1) képlet), a harmadfokú (bikubikus) polinomnak pedig tíz [5] paramétere van. Magasabb fokú polinom becslésekhez viszont legalább annyi feltételi egyenletet kell felírni, ahány paraméter van, ezért a magassági illeszkedésen túl további feltételekre van szükség [8]. Továbbá természetes igény,

hogy a háromszögeken definiált becslő függvények folytonosan kapcsolódjanak egymáshoz, aminek szükséges feltétele a paraméterek és a független illeszkedési egyenletek számának egyezése.

Ha TIN modellünkben lokális szélsőértéket (minimum vagy maximum) keresünk, akkor a síkillesztés csak az alappontokban találhat extrémumot, a lefedő háromszögek belsejében nem. Ezen javítandó olyan háromszögenként bikvadratikus véges elem felületinterpolációt dolgoztunk ki, mely illeszkedik az alappontokra, és folytonos az élek mentén. A megvalósításhoz kétféle becslést használtunk a parciális deriváltak kiszámításához.

## 2. Bikvadratikus interpoláció

Illesszünk háromszögenként egy

$$p(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \tag{1}$$

alakú másodfokú polinomot a felületre. A $p(x,y)$ becslő polinom meghatározásához háromszögenként csak három magassági illeszkedési feltételt tudunk felírni:

$$z_i = a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3x_iy_i + a_4x_i^2 + a_5y_i^2, i = 1,2,3 \tag{2}$$

Ha a háromszög csúcspontjaiban a felület normálvektora vagy gradiense ismert, tehát pl. a $\frac{\partial p(x_i,y_i)}{\partial x} = p_x(x_i,y_i)$ és $\frac{\partial p(x_i,y_i)}{\partial y} = p_y(x_i,y_i), i = 1,2,3$ parciális deriváltak ismertek, akkor pontonként további két illeszkedési egyenletet írhatunk fel:

$$p_x(x_i,y_i) = a_1 + a_3y_i + 2a_4x_i\,,\ p_y(x_i,y_i) = a_2 + a_3x_i + 2a_5y_i \quad i = 1,2,3 \tag{3}$$

A (3) képletek 6 egyenlete most 5 paramétert tartalmaz, ezért a felületelemek illeszkedése nem biztosított. Ha figyelembe vesszük a (2) feltétel is, akkor 9 egyenletet kapunk, melyhez 6 paraméter tartozik, ami nem biztosítja a felületelemek pontos illeszkedését. Ha bikubikus (harmadfokú) interpolációt alkalmazunk, az előbbiekhez hasonlóan 9 illeszkedési egyenletünk lesz 10 paraméterrel, ami nem vezet egyértelmű megoldáshoz. Annak érdekében, hogy egyértelműen megoldható egyenletrendszerhez jussunk, feltételi egyenleteket írunk fel a $d_{i,j}$ iránymenti deriváltakra vonatkozólag. Jelölje $t_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ az *i* és *j* pontok távolságát, akkor:

$$d_{i,j} = p_x(x_i,y_i)\cos\alpha + p_y(x_i,y_i)\sin\alpha, \tag{4}$$

ahol

$$\sin\alpha = (y_j - y_i)/t_{i,j} \text{ és } \cos\alpha = (x_j - x_i)/t_{i,j}\,. \tag{5}$$

Minden háromszög élnek csak az egyik végpontjában írjuk fel az irány menti derivált illeszkedését:

$$d_{i,j} = a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha + a_3(y_i\cos\alpha + x_i\sin\alpha) + 2a_4x_i\cos\alpha + 2a_5y_i\sin\alpha, \tag{6}$$

ahol $d_{i,j}$ értékét a 3. fejezetben ismertetett valamelyik becslési eljárással adjuk meg. A (2) és (6) feltételek 6 egyenletből álló 6 ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerhez vezetnek, ezért egyértelműen meghatározottak az (1) képlettel megadott felület paraméterei, amennyiben a feltételi egyenletek függetlenek. Ez belátható az egyenletrendszer mátrixának vizsgálatával, melynek többoldalas levezetésétől most eltekintünk, továbbá igazolható, hogy a rendszer determinánsa csak akkor lesz nulla, ha a háromszög három csúcspontja egy egyenesre illeszkedik, vagyis a $\boldsymbol{v}_i(x_i,y_i,1),\ i = 1,2,3$ vektorok nem függetlenek. Ha a háromszög egy élére szűkítjük az (1) becslést, akkor ott egy 3 paraméteres egyváltozós másodfokú polinomot kapunk, mely (2) miatt illeszkedik az él végpontjaira, illetve (4) miatt az egyik végpontban az

iránymenti derivált az él meredekségét írja elő – a feltételek és a paraméterek száma megegyezik, ezért a másodfokú polinom egyértelműen meghatározott. Szomszédos háromszögek közös élén ugyanazon egyváltozós polinom-szűkítéshez jutunk, ha biztosított, hogy az iránymenti meredekséget mindkét háromszög ugyanazon csúcspontjában írtuk elő. Ez elérhető pl. úgy, hogy mindig a kisebb azonosítójú ponttól a nagyobb azonosítójú pont felé mutató irányt ($i < j$) vesszük figyelembe. A fentiek miatt az él-szomszéd háromszögek felületbecslésének másodfokú határgörbéje a közös élen egybeesik, ezért a (2) és a (6) feltételeken alapuló véges elem interpoláció a háromszöghálóban mindenütt folytonos lesz.

## 3. A gradiens vektor becslése az alappontokban

Ha mérési pontonként csak a magasságok ismertek, de a magasabb rendű felületinterpolációhoz szükség van az alappontokban a felület gradiensének ismeretére, akkor a következőképpen járhatunk el:

Ha háromszögenként az alappontokra síkot illesztünk, vagyis egy $z(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$ bilineáris függvényt, akkor a háromszöghöz tartozó gradiens vektor komponensei $\nabla z(x,y) = (a_1, a_2)$ . Nekünk viszont nem egy háromszöghöz, hanem egy $P_0(x_0, y_0)$ alapponthoz rendelt (becsült) gradiensre van szükségünk, de erre a pontra a háromszögháló több háromszöge is illeszkedik - jelölje számukat $m$, és teljesüljön $m \geqslant 3$. A legegyszerűbb becslés az alappontra illeszkedő háromszögek gradiensvektorai átlagának választása:

$$p_{x0} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\,,\ p_{y0} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{2j} \tag{7}$$

A továbbiakban megadunk egy másik becslési eljárást a $P_0(x_0, y_0)$ alapponthoz tartozó gradiensre vonatkozólag. Ehhez feltételezzük, hogy az $(a_{1j}, a_{2j})$ gradiens csak a $j-$dik háromszög $(x_{sj}, y_{sj})$ súlypontjában érvényes. Becsüljük bilineáris regresszióval a gradiens komponenseit $P_0$-ban:

$$p_x(x_0, y_0) = a_x + b_x x_0 + c_x y_0 \quad p_y(x_0, y_0) = a_y + b_y x_0 + c_y y_0 \tag{8}$$

Az $(x_{sj}, y_{sj})$ súlypontokra vonatkozó illeszkedési feltételekkel határozhatjuk meg a (8) képlettel megadott $(p_x, p_y)$ gradiens bilineáris becslésének $(a_x, b_x, c_x)$ illetve $(a_y, b_y, c_y)$ paramétereit:

$$a_{1j} = a_x + b_x x_{sj} + c_x y_{sj}, \quad a_{2j} = a_y + b_y x_{sj} + c_y y_{sj},\ j = 1, \dots, m \tag{9}$$

A (9) szétválasztható egyenletrendszer (8) megoldása az $(a_{1j}, a_{2j})$ gradiensek súlyozott átlaga lesz, mert a két lineáris egyenletrendszer alapmátrixa megegyezik, mindkét mátrix $j-dik$ sora $(1, x_{sj}, y_{sj})$ alakú. Természetesen a (7) becslés is az $(a_{1j}, a_{2j})$ gradiensek egyensúlyú átlaga volt.

## 4. Lokális szélsőérték keresés a bikvadratikus interpoláció alapján

A (2) és (6) feltételek alapján illesszünk (1) egyenlettel megadott bikvadratikus becslést a TIN modell minden háromszögére. Láttuk, hogy a becslés folytonossága a háromszög élek mentén biztosított, és az (1) egyenlettel megadott másodfokú felületnek nemcsak a háromszög csúcspontjaiban lehet lokális szélsőértéke (1. ábra). A továbbiakban meghatározzuk ezen lokális szélsőérték helyét. Az (1) becslő függvény első rendű parciális deriváltjainak $(x_0, y_0)$ gyöke (8) képletek alapján számítható, ami a szélsőértékhely meghatározásának szükséges feltétele:

$$x_0 = \frac{a_2a_3-2a_1a_5}{4a_4a_5-a_3^2}, \quad y_0 = \frac{a_1a_3-2a_2a_4}{4a_4a_5-a_3^2} \tag{10}$$

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele, hogy a

$p_{xx}(x_0,y_0)p_{yy}(x_0,y_0) - p_{xy}(x_0,y_0)^2 > 0$ feltétel teljesüljön, ami ebben az esetben a:

$$4a_4a_5 - a_3^2 > 0 \tag{11}$$

feltételhez vezet, ebből adódik, hogy a (10) képletek nevezője nem lehet 0. Mivel $p(x,y)$ becslő függvény lokálisan csak a háromszögön értelmezett, ezért nem csak azt kell ellenőrizni (11) alapján, van-e szélsőérték az $(x_0,y_0)$ pontban, hanem azt is, hogy az $(x_0,y_0)$ pont belső pontja-e a háromszögnek. Ha igen, akkor az $a_4$ paraméter előjelének vizsgálatával eldönthető, hogy $p(x,y)$ becslő függvénynek lokális minimuma vagy maximuma van-e az $(x_0,y_0)$ pontban. Ha $a_4 < 0$, akkor $(x_0,y_0)$ lokális maximum pont, ellenkezőleg lokális minimum pont. A felület globális szélsőérték pontját ezután a véges sok lokális szélsőérték nagyságának összehasonlításával kapjuk. Ha a $p(x,y)$ felület-becslésnek $(x_0,y_0)$-ban nincs szélsőértéke, vagy $(x_0,y_0)$ nem belső pontja a háromszögnek, akkor még lehet lokális szélsőérték a véges értelmezési tartomány (a háromszög) határán. A háromszöget három egyenes szakasz határolja, melyeken az (1) kvadratikus becslés parabola ívekre esik szét. Tegyük fel, hogy $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ és $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$ pontok egy olyan háromszög oldalélét feszítik ki, ahol a felszín becslését az (1) képletű $p(x,y)$ bikvadratikus polinom szolgáltatja, melyre a (2) feltételek miatt természetesen teljesül $p(x_1,y_1) = z_1$, és $p(x_2,y_2) = z_2$. Legyen $\Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = y_2 - y_1$ és $\Delta z = z_2 - z_1$, akkor a $P_1P_2$ egyenes egy paraméteres előállítását az

$$x(t) = x_1 + (\Delta x)t,\ y(t) = y_1 + (\Delta y)t \quad \text{és} \quad z(t) = z_1 + (\Delta z)t \tag{12}$$

képletek szolgáltatják, ahol $x(0) = x_1,\ x(1) = x_2, y(0) = y_1,\ y(1) = y_2$ teljesül. A felszínt becslésére előállított $p(x,y)$ polinomnak a háromszög $P_1P_2$ oldalára korlátozott alakja:

$$p(t) = p\big(x(t),y(t)\big) = z_1 + (a_1\Delta x + a_2\Delta y + a_3(x_1\Delta y + y_1\Delta x) + 2a_4x_1\Delta x + 2a_5y_1\Delta y)t +$$
$$+(a_3\Delta x\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + a_5(\Delta y)^2)t^2.$$

$p(0) = z_1$ és $p(1) = z_2$ feltételek alapján, illetve némi átalakítás után kapjuk:

$p(t) = z_1 + (\Delta z)t + (a_3\Delta x\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + a_5(\Delta y)^2)(t^2 - t)$, ami (12) alapján átírható:

$$p(t) = z(t) + (a_3\Delta x\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + a_5(\Delta y)^2)(t-1)t \tag{13}$$

alakba. Ez alapján közvetlenül leolvasható a $p(t)$ becslésnek a $z(t)$ egyenestől való eltérése:

$$p(t) - z(t) = (a_3\Delta x\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + a_5(\Delta y)^2)(t-1)t. \tag{14}$$

A szakasz végpontjaiban (ahol $t = 0$ illetve $t = 1$) a (14) eltérés természetesen nulla. (13) összefüggés alapján:

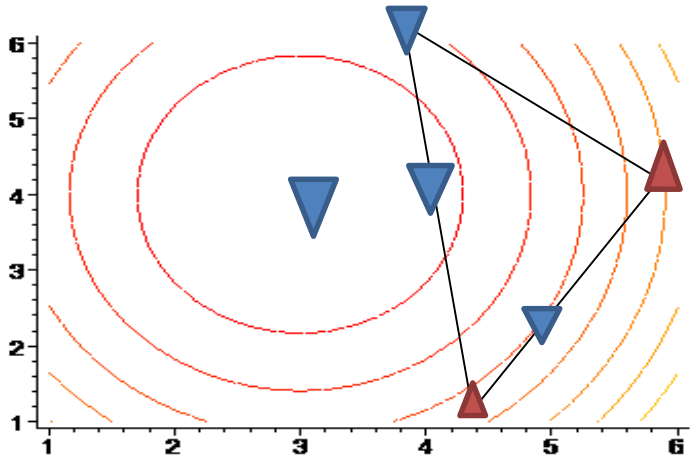
$$p'(t) = \Delta z + (a_3\Delta x\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + a_5(\Delta y)^2)(2t - 1).$$

A $p(t)$ függvény szélsőértékét deriváltjának $t_0$ gyökében találjuk:

$$t_0 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\Delta z}{a_3\Delta x\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + a_5(\Delta y)^2}\Big). \tag{15}$$

Minket csak a $P_1P_2$ szakaszra eső szélsőértékek érdekelnek, ezért, ha a $0 \le t_0 \le 1$ feltétel teljesül, akkor a szélsőérték helye és értéke a $P(x(t_0),y(t_0),p(t_0))$ pontban lesz:

$$x_0 = x_1 + (\Delta x)t_0,\ y_0 = y_1 + (\Delta y)t_0, z_0 = z_1 - t_0^2(a_3\Delta x\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + a_5(\Delta y)^2).$$




**1. ábra. Bikvadratikus felület globális és lokális szélsőérték pontjai (kék – min, piros – max)**

Az 1. ábrán egy forgási parabola szintvonalrajza, illetve egy rá illesztett háromszögön található extremális pontok vannak feltüntetve.

## 5. Egy kvadratikus spline interpoláció levezetése

Láttuk, hogy az (1) bikvadratikus becslésnek egy szakaszra vonatkozó (13) megszorítása tulajdonképpen a (16) képletű $g(t)$ függvény, amit a szakasz $P_i(t_i, m_i)$ végpontjaival ($i = 1, 2$) és az egyik végpontban a derivált (meredekség) $Q_i(t_i, d_i)$ értékével adunk meg:

$$g(t) = a + bt + ct^2 \tag{16}$$

Tehát a (16) másodfokú becslő polinom három paraméterének egyértelmű meghatározásához (17) négy illeszkedési feltételéből használjuk fel az első hármat:

$$a + bt_1 + ct_1^2 = m_1 \quad a + bt_2 + ct_2^2 = m_2$$
$$b + 2ct_1 = d_1 \quad b + 2ct_2 = d_2 \tag{17}$$

A (18) képletek határozzák meg a parabola $(a, b, c)$ paramétereit a (17) illeszkedési egyenletek alapján az $(m_1, m_2, d_1)$ feltételeket kielégítően, majd a kapott megoldást behelyettesítjük az illeszkedési feltételek utolsó $(d_2)$ egyenletébe:

$$a = \frac{t_1^2 t_2 d_1 + t_1^2 m_2 - t_2^2 t_1 d_1 - 2t_1 t_2 m_1 + t_2^2 m_1}{(t_1 - t_2)^2},\ b = -\frac{t_1^2 d_1 + 2t_1 m_2 - t_2^2 d_1 - 2t_1 m_1}{(t_1 - t_2)^2},\ c = \frac{t_1 d_1 + m_2 - t_2 d_1 - m_1}{(t_1 - t_2)^2}$$

$$d_2 - b - 2ct_2 = d_1 + d_2 - 2\frac{m_2 - m_1}{t_2 - t_1} \tag{18}$$

Látható, hogy az így kapott kifejezés akkor lesz nulla (ekkor a negyedik, $(d_2)$ illeszkedési egyenlet az $(m_1, m_2, d_1)$ illeszkedési egyenletek következménye), ha a deriváltak átlaga egyenlő az ismert függvényértékekből számolt differencia–hányadossal, vagyis:

$$\frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m_2 - m_1}{t_2 - t_1} \tag{19}$$

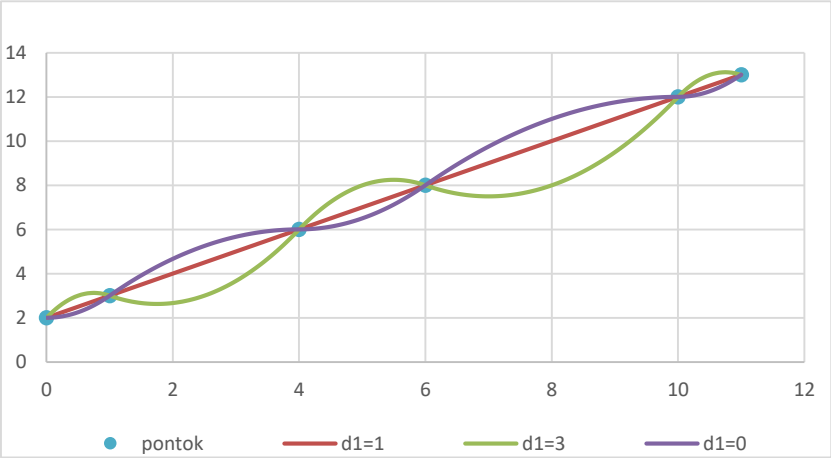
Tehát egy folytonos és folytonosan differenciálható kvadratikus spline interpolációhoz juthatunk úgy, hogy csak egy alappontban (pl. peremértékként) írjuk elő a deriváltat, a többi alappontban pedig szomszédról szomszédra ugrálva a (19)-ből levezetett (20) képlet alapján indukcióval számítjuk a deriváltak megfelelő értékét. Ez a derivált-becslés biztosítani fogja azt, hogy szakaszonként a (17) illeszkedési egyenletek alapján felírt (16) kvadratikus becslő

polinomok (21) együtthatókkal számított megoldásai folytonosan és egyszer folytonosan differenciálhatóan kapcsolódjanak egymáshoz a $P_i$ alappontokban.

$$d_{i+1} = 2\frac{m_{i+1}-m_i}{t_{i+1}-t_i} - d_i,\ a_i = \frac{t_i^2 t_{i+1} d_i + t_i^2 m_{i+1} - t_{i+1}^2 t_i d_i - 2t_i t_{i+1} m_i + t_{i+1}^2 m_i}{(t_i - t_{i+1})^2} \tag{20}$$

$$b_i = -\frac{t_i^2 d_i + 2t_i m_{i+1} - t_{i+1}^2 d_i - 2t_i m_i}{(t_i - t_{i+1})^2}, c_i = \frac{t_i d_i + m_{i+1} - t_{i+1} d_i - m_i}{(t_i - t_{i+1})^2}, i = 1, \dots, n-1 \tag{21}$$

A 2. ábrán ugyanazon pontsorozatra illesztett, kezdő meredekségükben eltérő spline függvények láthatók.




**2. ábra. A kezdő meredekség hatása a spline-interpolációra**

A (19) képlet segítségével egy másik interpolációs feladat megoldását is levezethetjük. Tegyük fel, hogy a keresett függvény $Q_i(t_i, d_i)$ deriváltjait az összes alappontban ismerjük, viszont peremfeltételként csak egy pontban ismert a $P_1(t_1, m_1)$ függvényérték. Keressük tehát a (17) feltételekből az $(m_1, d_1, d_2)$ illeszkedési egyenletekre leszűkített (16) bázisfüggvényű folytonos és folytonosan deriválható spline interpolációt. Fejezzük ki (19) képletből $d_2$ helyett az $m_2$ paramétert, akkor az alábbi indukciós összefüggéshez jutunk:

$$m_{i+1} = m_i + (t_{i+1} - t_i)\frac{d_i + d_{i+1}}{2} \tag{22}$$

A szakaszonként becslő polinomok paramétereit meghatározó (21) képletek továbbra is érvényben maradnak, mert (22) alapján rendelkezésre áll az összes függvényérték, és (19) teljesülése miatt a sima folytonosság is biztosított. A (22) képlet út-idő-sebesség viszonylatban egyébként úgy interpretálható, hogy az egyes útszakaszokat az elején és a végén mért sebességek átlagával teljesítjük.

## 6. Összefoglaló

Olyan TIN bázisú bikvadratikus véges-elem felületinterpolációt konstruáltunk, ahol a szomszédos felületelemek folytonosan illeszkednek egymáshoz, mert a magassági illeszkedési feltételek mellett a háromszög-élek mentén az iránymenti deriváltak egyezését írtuk elő. Az iránymenti deriváltat az alappontokban becsült parciális deriváltakból vezettük le, melyeket viszont a háromszögenkénti síkillesztések normálvektorai súlyozott átlagaként állítottuk elő.

A bikvadratikus felületinterpoláció alapján meghatároztuk a lokális szélsőérték létezésének feltételeit és konkrét pozícióit.

Folytonos és egyszer folytonosan differenciálható egyváltozós kvadratikus spline interpolációt határoztunk meg úgy, hogy a deriváltra (meredekségre) kezdőértéket csak egy pontban kell megadni, és a szakaszonkénti polinom-együtthatók egymástól függetlenül határozhatók meg.

## Köszönetnyilvánítás.

A publikáció a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János kutatási ösztöndíjának (BO/00324/18) és az Innovációs és Technológiai Minisztérium, ÚNKP-19-4-IV-SOE-5 pályázati kódszámú Új Nemzeti Kiválósági Programjának szakmai támogatásával készült.

## Irodalomjegyzék

[1] **Kalmár J.** (1986): Digital surface model on a triangular base, Acta Geod. Geoph. et Mont. 21, 71-79.
[2] **Bartels R. H., Beatty J. C., Barsky B. A.** (1987): An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling**,** in 1st Edition The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, pp. 476.
[3] **Kalmár J., Papp G., Szabó T.** (1995): DTM based surface and volume approximation with geophysical applications, Computers & Geosciences 21(2), 245-247. doi: 10.1016/0098-3004(94)00069-7
[4] **Kalmár J., Benedek J.** (2017): A vízterhelés, a vízgyűjtő és vízválasztó vonalak meghatározása az eső beszivárgásának és szétfolyásának modellezésével, Dimenziók, Matematikai Közlemények 5, 25-29. doi:10.20312/dim.2017.04
[5] **Kalmár J.** (1994) A digitális terepmodell kutatások új eredményei, kandidátusi értekezés.
[6] **Benedek J., Papp G., Kalmár J.** (2018): Generalization techniques to reduce the number of volume elements for terrain effect calculations in fully analytical gravitational modelling. Journal of Geodesy, 92(4), 361-381. doi:10.1007/s00190-017-1067-1
[7] **Nagy D., Franke R., Battha L., Kalmár J., Papp G., Závoti J.** (1999): Comparison of various gridding methods, Acta Geod. et Geoph. 34(1-2), 41-57. doi: 10.1007/BF03325556
[8] **Ahlberg J. H., Nielson E. N., Walsh J. L.** (1967): The Theory of Splines and Their Applications, in Mathematics in 1st Edition Science and Engineering, 38, pp 296.

doi:10.20312/dim.2020.05

# Havi átlaghőmérsékletek regressziós vizsgálata

**Csanády Viktória**
SOE Matematikai Intézet
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A klímaváltozás napjaink egyik fontos kutatási témája. A felmelegedés, a hőmérséklet emelkedés már kimutatott tény, számtalan tudományos publikáció jelenik meg e témában. Felmerül a kérdés azonban, hogy csupán az átlaghőmérsékletekkel, mint jellemző értékekkel mit kezdhetünk, milyen információt birtokolnak és abból vagy azokból milyen következtetést vagy következtetéseket vonhatunk le.
Az alábbiakban több mint 100 év átlaghőmérsékleti adatai közül 5 éves periódusban kiválasztott évek havi középhőmérsékletei adják a vizsgálat tárgyát, a módszer pedig regressziós vizsgálat két alkalmas modell felhasználásával.

ABSTRACT. Climate change is an important research topic nowadays. Global warming and temperature rise have been proved and described in several scientific publications. The questions arise: for what can we use the average temperature as a specific data; what kind of information does it carry; and what kind of conclusions can be drawn from it.
In the followings, we examine the average monthly temperatures in chosen periods of five consecutive years from more than a hundred years' data. We apply two suitable regression models for our investigations.

## 1. Bevezetés

Napi aktualitással kapjuk az információt időjárásunk legfontosabb jellemzőiről, amit természetesen csak aktualitásában használunk leggyakrabban fel, a szélsőségek azonban mindenki számára ismertek. Ha azonban csak egy átlaghőmérséklet áll rendelkezésünkre, vajon milyen következtetést vonhatunk le. Nyilván az átlag elrejti a szélsőségeket, de hosszú távon jeleznie kell a már igazolt hőmérséklet emelkedést, illetve jeleznie kell a hőmérsékleti tendencia változását.

## 2. Anyag és módszer

A vizsgálat tárgyát 118 esztendőből 5 évenkénti periódusban vételezett évek adják, nevezetesen 1901, 1905, 1910, …, 2015 és 2019. évi Budapesten mért havi átlaghőmérsékleti adatokkal reprezentálva. Az éves adatsorok elemzése alkalmas grafikonok révén történik, valamint regressziós elemzés felhasználásával melynek során két modell illesztésére kerül sor. Az alábbi táblázatokban olvashatók a vizsgált adatok, szemrevételezhetők a differenciák.

| Havi átlagmőmérséklet | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1901 | 1905 | 1910 | 1915 | 1920 | 1925 | 1930 | 1935 |
| Január | -4,7 | -3,2 | 1,5 | 2,1 | 3,1 | 0,2 | 0,3 | -2,2 |
| Február | -2,1 | 1,8 | 5,3 | 2 | 2,3 | 5,6 | 1,4 | 0,6 |
| Március | 5,8 | 7,1 | 7,4 | 3,5 | 8,2 | 5,1 | 7,6 | 4,6 |
| Április | 11,6 | 9,5 | 10,9 | 10,8 | 14,2 | 11,3 | 12,4 | 11,1 |
| Május | 16,8 | 16,4 | 16 | 16,9 | 18,5 | 17,7 | 15,6 | 14,9 |
| Június | 21 | 20,4 | 19,9 | 20,3 | 17,8 | 18 | 21,8 | 21,7 |
| Július | 22,4 | 23,7 | 20,3 | 20,1 | 21,8 | 21,2 | 21,6 | 21,9 |
| Szeptember | 20,7 | 22,4 | 20,1 | 18,3 | 18,8 | 20,3 | 20,2 | 20,2 |
| Október | 15,9 | 18 | 14,4 | 13,4 | 16,1 | 14,5 | 17,9 | 16,2 |
| November | 12,6 | 7 | 10,1 | 9,5 | 7,9 | 11,3 | 11,3 | 13,7 |
| December | 4,7 | 6,7 | 3,8 | 3,2 | 0,4 | 5,8 | 7,7 | 4,8 |

**1. táblázat. Havi átlaghőmérséklet 1901-2035**

| Havi átlagmőmérséklet | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1940 | 1945 | 1950 | 1955 | 1960 | 1965 | 1970 | 1975 |
| Január | -7 | -3,5 | -2,3 | -1 | -1,2 | 0,7 | -1,2 | 3,3 |
| Február | -5 | 1,9 | 1,8 | 1,2 | 0,3 | -1,6 | 0,6 | 2,1 |
| Március | 2,6 | 6,7 | 8,1 | 4,4 | 6,9 | 5,9 | 4,8 | 8,7 |
| Április | 11,5 | 12,2 | 12,3 | 8,7 | 11,4 | 10 | 11 | 11,4 |
| Május | 14,4 | 18,2 | 18,7 | 15,1 | 15,6 | 14,7 | 15 | 18,4 |
| Június | 19,3 | 20,9 | 21,7 | 19,1 | 20,3 | 19,1 | 20,6 | 19,5 |
| Július | 20,7 | 22,4 | 24,2 | 21 | 19,7 | 20,6 | 20,9 | 21,6 |
| Szeptember | 17,7 | 21,2 | 22,5 | 19,6 | 20,8 | 18,8 | 20,5 | 20,8 |
| Október | 16,1 | 17 | 17,4 | 16,8 | 15,6 | 16,7 | 16,3 | 18,7 |
| November | 10,8 | 10,5 | 9,7 | 10,9 | 12,3 | 9,9 | 10,5 | 11,3 |
| December | 8,1 | 5,5 | 6,1 | 5,6 | 8 | 2,9 | 8,3 | 4,4 |

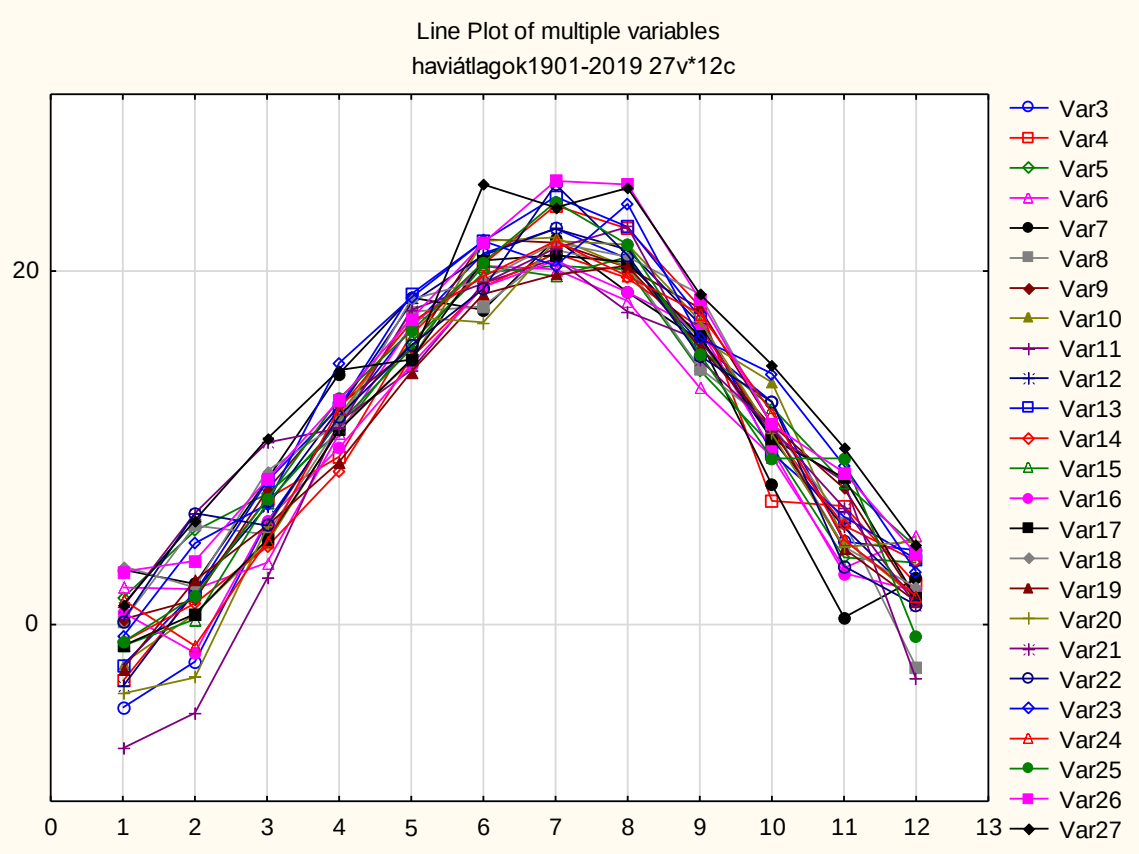
**2. táblázat. Havi átlaghőmérséklet 1940-2075**

| Havi átlagmőmérséklet | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 | 2010 | 2015 | 2019 |
| Január | -2,5 | -3,9 | 1 | 0,2 | -0,7 | 1,4 | -1 | 3 | 1,1 |
| Február | 2,5 | -3 | 6,3 | 6,3 | 4,6 | -1,2 | 1,6 | 3,6 | 5,9 |
| Március | 5,6 | 5,5 | 10,3 | 5,6 | 6,8 | 4,7 | 7,1 | 8,2 | 10,5 |
| Április | 9,2 | 11,8 | 11,1 | 11,8 | 14,8 | 12,2 | 12,8 | 12,7 | 14,4 |
| Május | 14,3 | 17,4 | 17,8 | 15,8 | 18,5 | 17,1 | 16,6 | 17,3 | 15 |
| Június | 18,7 | 17,1 | 19,3 | 19 | 21,7 | 19,7 | 20,5 | 21,6 | 24,9 |
| Július | 19,8 | 21,7 | 21,3 | 24,9 | 20,3 | 21,7 | 23,9 | 25,1 | 23,6 |
| Szeptember | 20,3 | 21,5 | 22,5 | 20,9 | 23,8 | 19,7 | 21,5 | 24,9 | 24,7 |
| Október | 15,7 | 17,2 | 15 | 15,2 | 16,2 | 17,6 | 15,3 | 18,4 | 18,7 |
| November | 11,2 | 10,8 | 11,1 | 12,6 | 14,2 | 12 | 9,4 | 11,3 | 14,7 |
| December | 4,3 | 4,4 | 6,6 | 3,3 | 9 | 4,8 | 9,4 | 8,6 | 10 |

**3. táblázat. Havi átlaghőmérséklet 1980-2019**

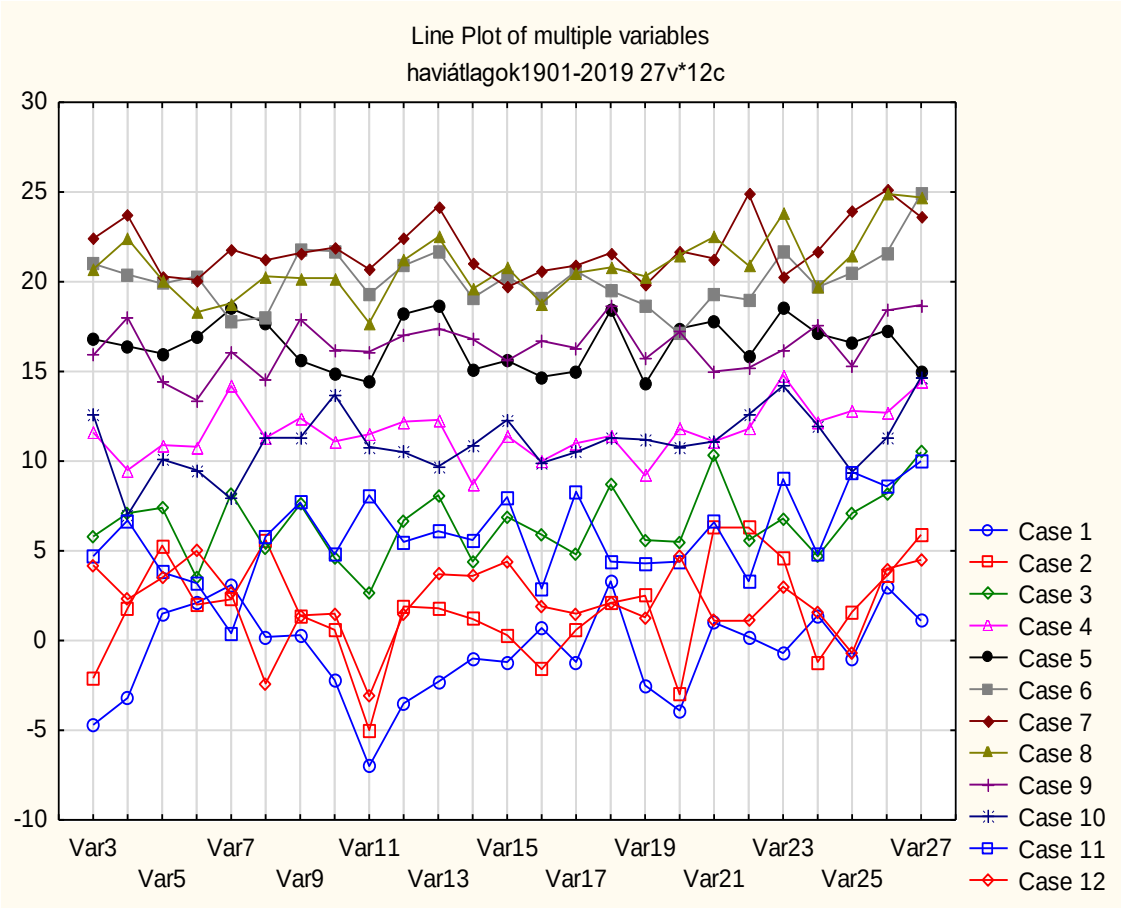
## 3. Számított eredmények, kiértékelés

A rendelkezésre álló adatok táblázatos elemzése felületes és nem ad kellő információt, ezért első lépésben célszerű az adatok vizuális megjelenítése. Ennek két látványos lehetősége is adott, elsőként tekintsük független változónak a hónapokat és függőnek a havi átlaghőmérsékleteket, így a vizsgált évek hőmérsékletváltozási tendenciái jól láthatók, ahogy azt az alábbi ábrák is mutatják var3=1901,var4=1905,…, var27=2019.




**1. ábra. Havi átlaghőmérsékletek**

Egy másik lehetőség az egyes hónapok hőmérsékleteinek vizsgálata az évek függvényében, itt tehát a független változó a vizsgált 25 év ahol var3=1901, var4=1905, …, var27=2019, a függő változó pedig egy adott hónap átlaghőmérséklete 12 hónapra kibővítve. Az alábbi ábrán nyomon követhetjük tehát az egyes évek változásait ahol case1= a januári középhőmérséklet case2= a februári középhőmérséklet és így tovább case12= a decemberi középhőmérséklet. Az ábra jól szemlélteti az egyes évek kiugró változását egy-egy adott hónapra nézve, míg az előző ábra a havi középhőmérsékletek trendjét jelzi. Mind a két ábra azonban csak tájékoztató jellegű, matematikai vagy statisztikai mutató nélkül.




**2. ábra. Havi átlaghőmérséklet évenkénti változása**

A vizuális vizsgálat 1. ábrája instrukciót ad a regressziós vizsgálat modellválasztására. A rendelkezésre álló adatok jellegének áttekintése alapján a kiválasztandó függvénynek rendelkeznie kell maximummal, a közelítő szimmetria miatt két inflexiós ponttal, és szükséges, hogy felülről és alulról is korlátos legyen. Ezen túlmenően paraméterei legyenek közvetlenül értelmezhetők, és darabszámuk minél több közvetlen vagy közvetett információt adjon.

Mind ezek figyelembevételével két modell alkalmazására került sor, elsőként egy Gauss-görbére, majd pedig egy szinuszawrami illesztésére. Az alkalmazott két modell számítógépes alakja:

1. *var2=b3/exp(b2*(var1-1*b1)^2)+b0*
   A függvény görbületi jellege állandó a 2-es hatványkitevő miatt.

2. *var2=b3*sin(3.14159*(1-exp(-1*(b2*var2)^b1)))+b0*
   A függvény nem periódikus, nem szükségszerűen szimmetrikus, egy maximummal rendelkezik valamint egy vagy két inflexiós ponttal.

A kétszer 25 illesztés paramétereinek értékei, az alábbiakban nem kerülnek felsorolásra, viszont az alábbi táblázat tartalmazza az illesztések jóságát igazoló nem lineáris korrelációs együttható (korrelációs index) értékeit.

| Évek | R - gauss görbe esetén | R - szinuszawrami esetén | deltaR |
|---|---|---|---|
| 1901 | 0,9882 | 0,9939 | 0,0057 |
| 1905 | 0,9825 | 0,9803 | -0,0022 |
| 1910 | 0,9916 | 0,9863 | -0,0053 |
| 1915 | 0,9829 | 0,9862 | 0,0033 |
| 1920 | 0,9677 | 0,9557 | -0,012 |
| 1925 | 0,9736 | 0,9573 | -0,0163 |
| 1930 | 0,9931 | 0,9866 | -0,0065 |
| 1935 | 0,9933 | 0,9899 | -0,0034 |
| 1940 | 0,9868 | 0,9813 | -0,0055 |
| 1945 | 0,9982 | 0,9934 | -0,0048 |
| 1950 | 0,9925 | 0,9924 | -0,0001 |
| 1955 | 0,9975 | 0,9978 | 0,0003 |
| 1960 | 0,9923 | 0,9942 | 0,0019 |
| 1965 | 0,9861 | 0,9828 | -0,0033 |
| 1970 | 0,9944 | 0,9932 | -0,0012 |
| 1975 | 0,9812 | 0,9713 | -0,0099 |
| 1980 | 0,9941 | 0,9862 | -0,0079 |
| 1985 | 0,9773 | 0,9807 | 0,0034 |
| 1990 | 0,9784 | 0,9611 | -0,0173 |
| 1995 | 0,9743 | 0,9676 | -0,0067 |
| 2000 | 0,9849 | 0,9772 | -0,0077 |
| 2005 | 0,9854 | 0,9825 | -0,0029 |
| 2010 | 0,9833 | 0,9777 | -0,0056 |
| 2015 | 0,9937 | 0,9915 | -0,0022 |
| 2019 | 0,9789 | 0,9705 | -0,0084 |

**4. táblázat. Korreláció együttható (korrelációs index) értékei**

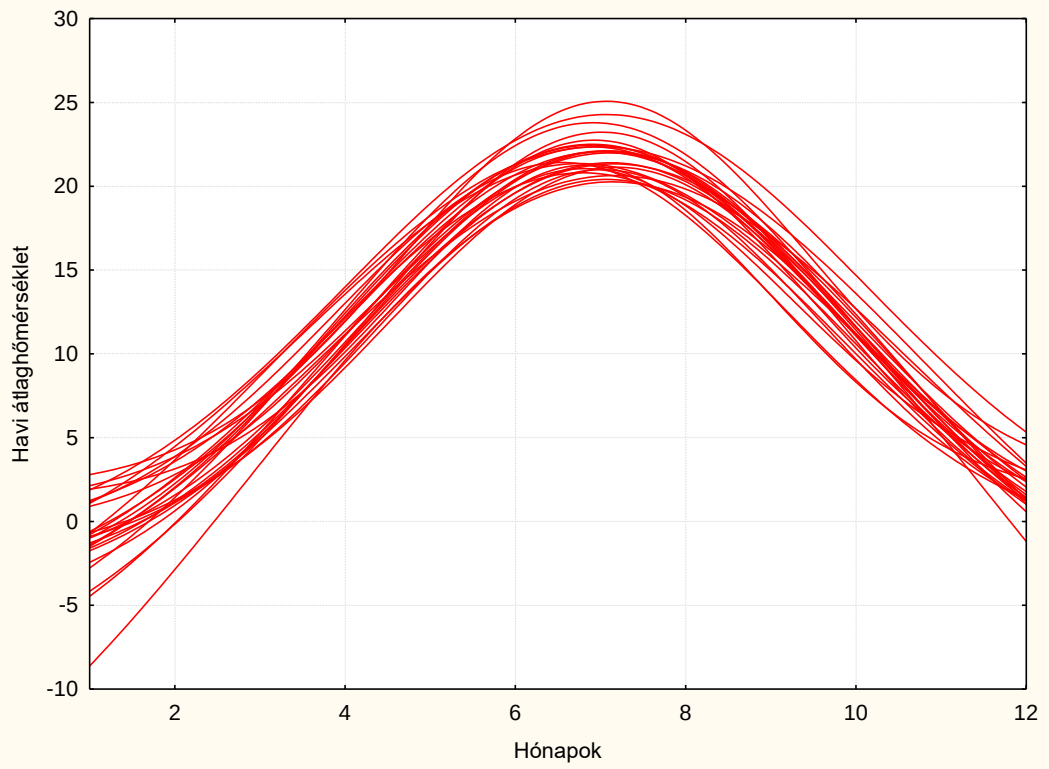
A fenti táblázatból kitűnik, hogy a legkisebb R érték 0,9557 ami jó illeszkedésre utal, a többi esetben az értékek ennél még magasabbak, így a két modell szorosan követi a pontsorozat tendenciáját. Az R értékek eltérése elenyésző legszélsőségesebb esetben is csak 0,0173, ami azt igazolja, hogy mindkét modell alkalmas a trend leírására.

Megjegyzendő, hogy a modellek illesztése során a kezdőértékek megadása nem okoz problémát. A Gauss-görbe esetén a kezdőértékek közül csak a vízszintes eltolási paraméter igényel korrigálást a program által megadott alapértékekre vonatkozóan, ami a pontsorozat maximumának helyével egyezik. Három esetben pedig a függőleges nyújtási paraméter értéke szorult korrekcióra a gép által megadott 0,1 helyett 1-re a pontsorozat hirtelen meredeksége miatt.

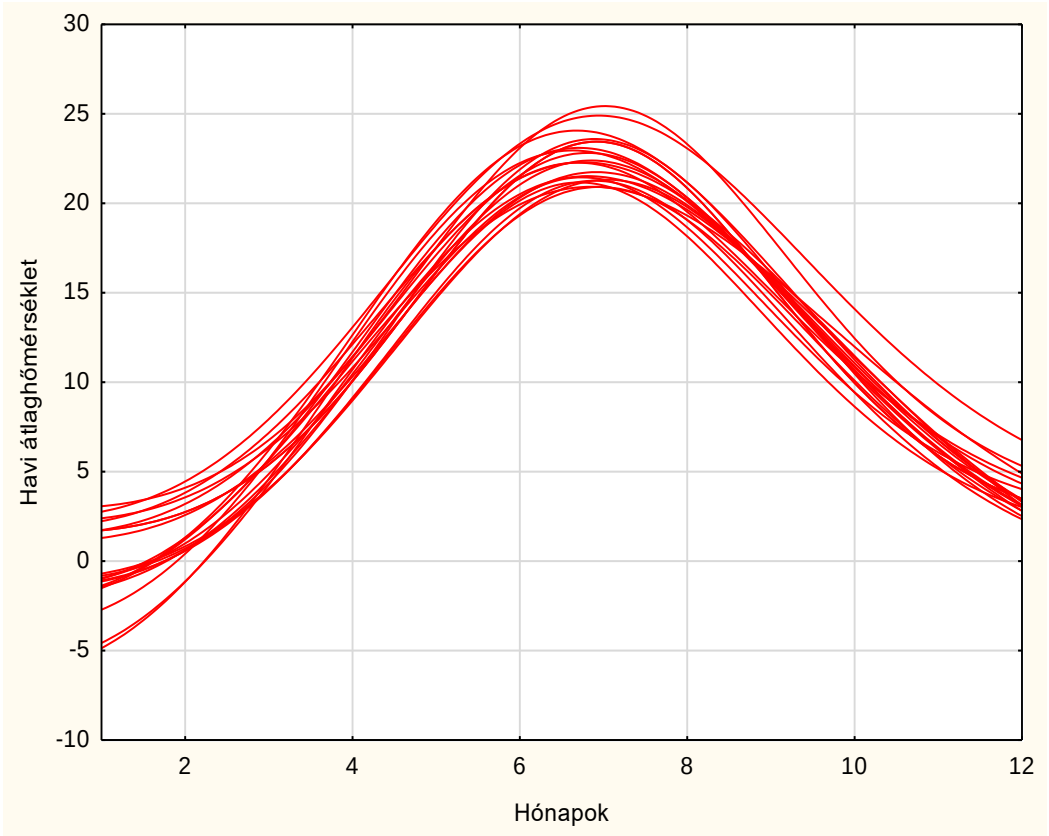
A szinuszawrami esetén a kezdőértékek nem szorultak korrekcióra, a program eredeti kezdőértékei alkalmasak a program futtatása során.

Az alábbi két ábra az illesztett két modell görbeseregét mutatja, melyek jelentős formai eltérést nem mutatnak. A Gauss-görbék esetén nagyjából paralel a lefutás, csak az 1940-es év kritikus, melynek során a hőmérséklet emelkedése kezdetben szinte lineáris és ez jellemzi az év utolsó hónapjait is nyilván közel lineáris csökkenéssel. A többi esetben lényegesen kisebb a formai eltérés ami vízszintes és függőleges eltolódásból adódik főként. A maximum értékek legnagyobb eltérése 4,8 Celsius fok, ami az illesztés esetén is teljesül.

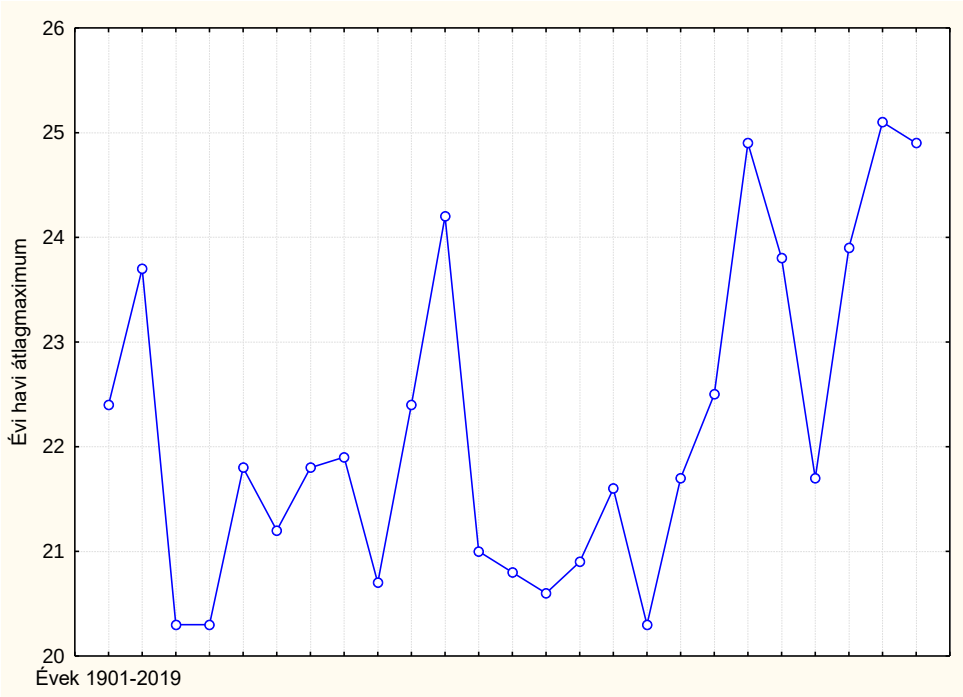
A szinuszawrami illesztése során kapott görbesereg a modell rugalmassága miatt már nem szimmetrikus, az egyes évek trendje legtöbb esetben paralel. A maximum értékek legnagyobb eltérése itt is megfelel az adatokból kapott 4,8 Celsius fok értéknek




**3. ábra. Görbesereg Gauss-görbe esetén**

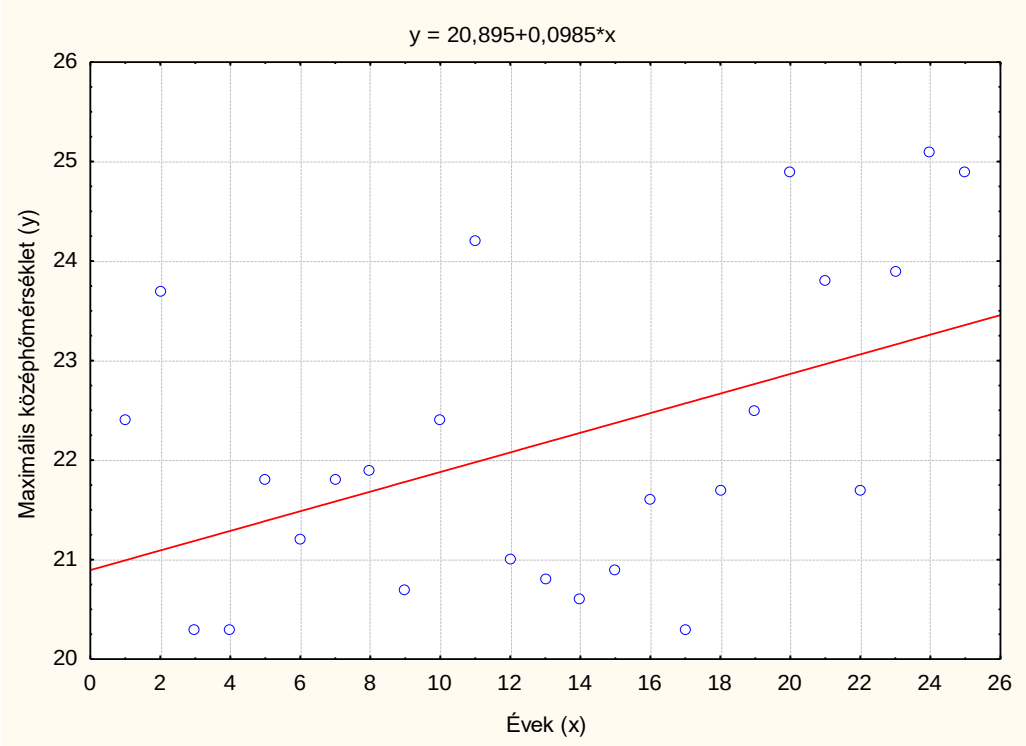



**4. ábra. Görbesereg szinuszawrami esetén**



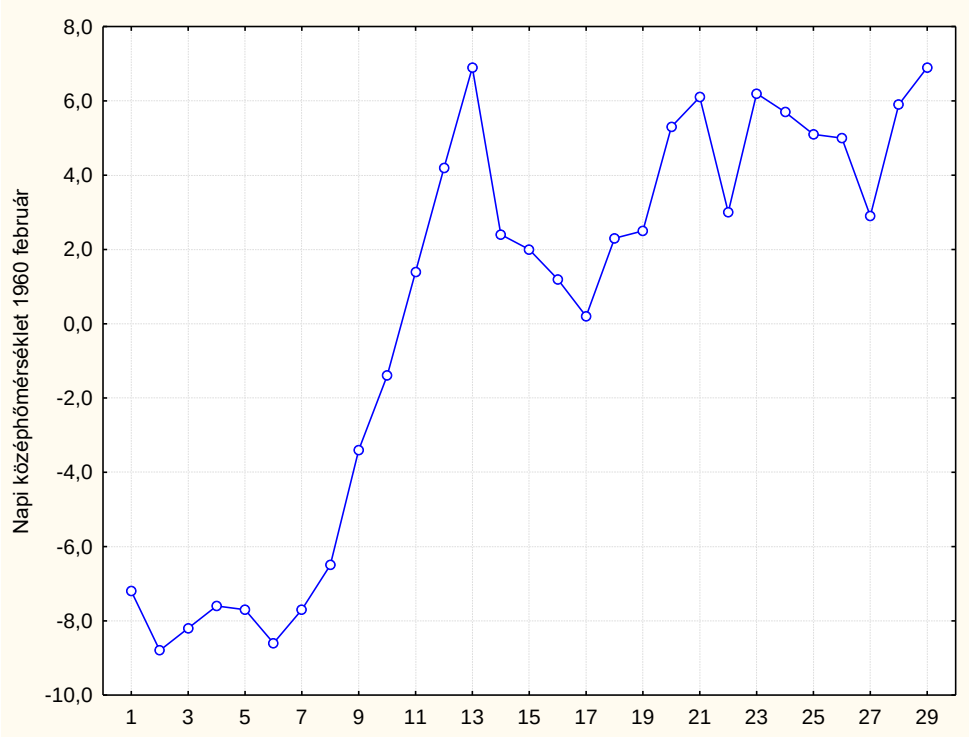

**5. ábra. Évenkénti havi átlagmaximumok**

A 3.5 ábra az évenként előforduló legmagasabb havi középhőmérsékletet mutatja az adott évhez tartozóan. Az adatok ingadozásának mértéke nagy a trend viszont emelkedő jellegű.




**6. ábra. Maximális középhőmérsékletek trendje**

Feltevődik azonban a kérdés, hogy elegendő-e csupán a havi középhőmérsékletek vizsgálata ahhoz, hogy teljes részletes képet adhassunk a hőmérséklet alakulásáról. Természetesen nem, mivel a havi középhőmérséklet takarja a havi adatok szélsőséges változását amit az alábbi ábra jól mutat. Viszont a trendek megadásához elegendő.




**7. ábra. Napi középhőmérsékletek 1960 február**

## 4. Következtetés

A vizsgálatokból levonható következtetések szerint elemezve az eredményeket a következő megállapítások tehetők:

- A két modell alkalmas a havi középhőmérsékletek tendenciájának vizsgálatára, mely szerint a tendencia nem változik, csak eltolódik.
- A hőmérsékleti maximumok nőnek, trendjük ezt igazolja, a vizsgált időszak a maximum értékekre nézve 5 fok különbséget mutat maximálisan.
- A két modell tendenciájában nem tér el lényegesen szoros korreláció mellett.
- A havi középhőmérsékletek takarják a hőmérsékleti anomáliákat.

## 5. Összefoglaló

A felsoroltak és bemutatottak alapján megállapítható, hogy bár a regressziós eljárások alkalmasak a trend bemutatására mégsem adnak biztos eredményt mivel az átlagok kisimítják a hőmérsékleti anomáliákat, így szükséges a napi átlaghőmérséklet beható vizsgálata.

## Irodalomjegyzék

[1] **Csanády V., Horváth–Szováti E., Szalay L.**, Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), 175p.
[2] **Csanády V.,** Időjárás elemzés regressziós eljárás alkalmazásával, Dimenziók, Matematikai Közlemények III. (2015), 25-34. doi:10.20312/dim.2015.04
[3] StatSoft Inc., "Statistica," Data Analysis Software System, version 7, 2004.

doi:10.20312/dim.2020.06

# Másodrendű differenciálegyenletes modellek

**Horváth-Szováti Erika**
Soproni Egyetem Matematikai Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A természettudományokban sok probléma megoldásához másodrendű differenciálegyenletek felírása és megoldása szükséges. Ezek szemléltetése a hallgatók erősen korlátozott matematikai eszköztára miatt csak alaposan végiggondolt, és a lehetőségekhez mérten maximálisan leegyszerűsített feladatok segítségével lehetséges. Az itt felsorolásra kerülő példák ebben nyújthatnak segítséget.

ABSTRACT. Here are simple practical examples that highlights the practical application of second order differential equations. To solve these math problems, students need only a little background knowledge. By these exercises, the students can see that differential equations are essential in different sciences.

## 1. Bevezetés

A természettudományokban sok folyamat leírása csak differenciálegyenletekkel lehetséges. Ezen belül a másodrendű differenciálegyenletek előfordulása is nagyon gyakori. Egy egyenletesen változó mozgás leírása (pl. szabadesés légellenállással), egy RLC körben az áramforrás elektromotoros erejének időbeli változása, egy hővezető rúd hőmérsékletének változása, stb. mind-mind másodrendű differenciálegyenletekkel leírható problémák. A rezgések differenciálegyenletei is ebbe a csoportba tartoznak, amelyeket a környezetmérnök hallgatók a hangterjedés vizsgálata, a rezgéscsillapítás lehetőségei, a zaj- és rezgésvédelem témakörökben használnak. Tudományos kutatásaik, diplomamunkájuk során szintén találkozhatnak olyan irodalommal, amelyben másodrendű differenciálegyenletek szerepelnek. BSc szinten egy ilyen egyenlet önálló felírása nem cél, azonban az értelmezés, következtetések levonása elvárható. A másodrendű differenciálegyenletek alább összegyűjtött alkalmazásai olyan egyszerű példák, amelyek a csekélyebb matematikai háttértudással rendelkező hallgatókat is segíthetik abban, hogy a témakör jelentőségét megértsék. Itt csak kétféle másodrendű differenciálegyenlet típussal foglalkozunk, azzal a kettővel, amelyeket a BSc képzésben tanítunk. Bízunk abban, hogy az alábbi kidolgozott példák elemzése után a hallgatók más típusú differenciálegyenletek önálló értelmezésétől sem riadnak majd vissza.

## 2. Egyenletesen változó mozgás leírása (két egymást követő integrálással megoldható feladatok)

**2.1. feladat**. Egy gépkocsi 72 $\frac{km}{h}$ sebességről egyenletesen lassulva 10 $s$ alatt áll meg. Mekkora utat tesz meg ezalatt? Jelöljük $x(t)$-vel a megtett utat az idő függvényében. Mivel a gépkocsi egyenletesen lassul, így $\ddot{x}(t) = a,$ ahol $a \in \mathbb{R}$. (Megj.: Fizikából tudjuk, hogy az $x(t)$ függvény idő szerinti első deriváltja a sebesség, a második deriváltja pedig a gyorsulás.)

**Megoldás.** A feladatban adott

$$\ddot{x}(t) = a$$

differenciálegyenletből indulunk ki, kétszer integráljuk mindkét oldalt az idő szerint:

$$\dot{x}(t) = at + C_1$$
$$x(t) = a\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A feladat szövegéből a következő három kezdeti feltétel adódik:

- A test által megtett fékút a fékezés kezdetekor, vagyis a $t = 0\ s$ időpillanatban $0\ m$ volt:

$$x(0) = 0\,.$$

- A test a $t = 0\ s$ időpillanatban $72\ \frac{km}{h} = 20\ \frac{m}{s}$ sebességgel mozgott:

$$\dot{x}(0) = 20\,.$$

- A test $10\ s$ alatt állt meg, vagyis a sebessége ekkor $0\ \frac{m}{s}$ volt:

$$\dot{x}(10) = 0\,.$$

Írjuk be a kezdeti feltételeket a differenciálegyenlet általános megoldásába, illetve az első deriváltba!

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a\cdot\frac{0^2}{2} + C_1\cdot 0 + C_2 \\ 20 &= a\cdot 0 + C_1 \\ 0 &= a\cdot 10 + C_1 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $C_1 = 20,\ C_2 = 0,\ a = -2$. Ezeket visszahelyettesítve az általános megoldásba megkapjuk a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldást:

$$x_p(t) = -2\frac{t^2}{2} + 20t.$$

Ebből meg tudjuk határozni a keresett utat:

$$x_p(10) = -2\frac{10^2}{2} + 200 = 100\ (m).$$

**Megjegyzés.** Az $x(t) = a\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ általános megoldásban $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$, $a$: a test gyorsulása (vagy lassulása). Tehát valójában a fizikából ismert $s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t$ képlet, amely segítségével a $v_0$ kezdősebességgel rendelkező, $a(>0)$ egyenletesen gyorsuló (vagy $a(<0)$ egyenletesen lassuló) test által $t$ idő alatt megtett utat szoktuk kiszámolni.

**2.2. feladat**. Egy $30°$-os hajlásszögű lejtőre helyezett fakocka álló helyzetből indulva, kezdősebesség nélkül csúszik a lejtő tetejéről lefelé. Legyen $x(t)$ a test által megtett út az idő függvényében, $\alpha$ a lejtő hajlásszöge, $g$ a gravitációs gyorsulás ($g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$), és $\mu$ a test és a lejtő anyaga közötti csúszási súrlódási együttható ($\mu = 0{,}5$). Ekkor Newton II. törvénye szerint a test elmozdulását az idő függvényében leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = g(sin\alpha - \mu cos\alpha)$. Mekkora utat tesz meg a test az indulástól számított 3 másodperc alatt?

**Megoldás.** A feladatban adott differenciálegyenlet másodrendű, hiányos. Két egymást követő integrálással megoldható:

$$\ddot{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha),$$

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot t\ + \ C_1,$$

$$x(\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot \frac{t^2}{2}\ + \ C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A test álló helyzetből, kezdősebesség nélkül kezd el csúszni a lejtő tetejéről lefelé, azaz adottak a következő kezdeti feltételek: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Ezeket az általános megoldásba, illetve annak deriváltjába visszahelyettesítve:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot 0\ + \ C_1 \\ 0 &= \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot \frac{0^2}{2} + \ C_1 \cdot 0 + C_2 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $C_1 = 0,\ C_2 = 0$. A konstansokat behelyettesítve az általános megoldásba a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldást kapjuk:

$$x_p(\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot \frac{t^2}{2}\ .$$

Ebből kiszámítható a test által 3 másodperc alatt megtett út:

$$x_p(3) = \frac{9}{2} \cdot 10 \cdot (\sin 30° - 0{,}5 \cdot cos 30°) \approx 3{,}01\ (m).$$

## 3. Harmonikus rezgések (állandó együtthatós, másodrendű, lineáris differenciálegyenletek)

**3.1. feladat**. Egy rugóra akasztott test harmonikus rezgőmozgást végez, jelöljük $x(t)$-vel a kitérés-idő függvényt. Harmonikus rezgőmozgás esetén a test gyorsulása arányos és ellentétes irányú a kitéréssel, azaz: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$. (Az $\omega$ neve körfrekvencia, továbbá $\omega^2 = \frac{D}{m}$, ahol $D$ a rugóállandó, m a test tömege.) A test kitérése $t = 0$ másodperc időpillanatban 0 méter, a sebessége pedig ugyanekkor 3 $\frac{m}{s}$. Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében, ha $\omega = 1\ \left(\frac{1}{s}\right)$! Határozzuk meg a test kitérését a $t = \frac{\pi}{6}$ másodperc időpillanatban!

**Megoldás.** A feladatban egy homogén, állandó együtthatós, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet adott, amelybe behelyettesítve $\omega$ értékét, majd nullára rendezve az

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

egyenletet kapjuk. Az ebből felírható karakterisztikus egyenlet (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$), illetve annak gyökei:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$
$$\lambda = \pm i,$$

az általános megoldás pedig

$$x(t) = C_1 e^{0t} sint + C_2 e^{0t} cost = C_1 sint + C_2 cost, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Mivel az egyik kezdeti feltétel a sebességet adja meg egy időpillanatban, így szükség van a sebesség-idő függvényre is, amely a kitérés-idő függvény deriváltja:

$$\dot{x}(t) = C_1 cost - C_2 sint.$$

A partikuláris megoldást úgy kapjuk meg, hogy behelyettesítjük a kezdeti feltételeket az általános megoldásba, illetve annak deriváltjába. A szövegben megadottak alapján a test kitérése $t = 0$ másodperc időpillanatban 0 méter, a sebessége pedig ugyanekkor 3 $\frac{m}{s}$. Eszerint $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 3$. Ebből a

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \\ C_1 \cdot 1 - C_2 \cdot 0 = 3 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer adódik, amelyből $C_1 = 3$ és $C_2 = 0$, tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás

$$x_p(t) = 3sint.$$

A $t = \frac{\pi}{6}$ másodperc időpillanatban a test az egyensúlyi helyzettől 1,5 méterre lesz:

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3sin\frac{\pi}{6} = 1{,}5.$$

**3.2. feladat**. Egy harmonikus rezgőmozgást végző testre a közegellenállás csillapításként hat, amely a sebességgel arányos, és azzal ellentétes irányú. Ekkor a test mozgását leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) - k\dot{x}(t)$ , ahol $x(t)$ a test kitérése az idő függvényében, az $\omega$ arányossági tényező a körfrekvencia (ld. előző feladat), a $k(> 0)$ pedig a csillapítási konstans, melynek értéke a feladatban $k = 10\ \frac{Ns}{m}$. A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor 12 $\frac{m}{s}$. Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében, ha $\omega = 4\ \frac{1}{s}$! Határozzuk meg a test kitérését a $t = 1s$ időpillanatban!

**Megoldás.** Hasonlóan oldjuk meg, mint az előző feladatot. A karakterisztikus egyenlet (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$), illetve annak gyökei:

$$\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 16x(t) = 0,$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0,$$

$$\lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 16}}{2},$$

amelyből $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -8$, az általános megoldás pedig

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ismét szükség van a sebesség-idő függvényre is, emiatt deriváljuk az előbbi függvényt:

$$\dot{x}(t) = -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t}.$$

A test kitérése $t = 0\ s$ időpillanatban 0 méter, a sebessége pedig ugyanekkor 12 $\frac{m}{s}$, vagyis $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 12$. Ezeket behelyettesítve az általános megoldásba, illetve annak deriváltjába:

$$\left.\begin{matrix} C_1 + C_2 = 0 \\ -2C_1 - 8C_2 = 12 \end{matrix}\right\}.$$

Ebből $C_1 = 2$ és $C_2 = -2$ adódik, tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás

$$x_p(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-8t}.$$

A test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban

$$x_p(1) = 2e^{-2} - 2e^{-8} \approx 0{,}27\ (m).$$

**Megjegyzés.** Egy $m$ tömegű harmonikus rezgőmozgást végző testre $\frac{1}{10} mgsint$ nagyságú periodikus gerjesztő erő hat, ahol $g$ a gravitációs gyorsulás ($g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$). Az egyszerűség kedvéért a csillapítástól eltekintünk. Ekkor a test mozgását leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) + sint$, ahol $x(t)$ a test kitérése az idő függvényében, az $\omega$ arányossági tényező a körfrekvencia, melynek nagysága 2 $\frac{1}{s}$. A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor $\frac{7}{3}\frac{m}{s}$. Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében! Határozzuk meg a test kitérését a $t = \frac{\pi}{2} s$ időpillanatban!

**Megoldás**. A következő másodrendű, állandó együtthatós, lineáris, inhomogén differenciálegyenletet kell megoldani:

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = sint\ .$$

Először a homogén egyenlet általános megoldását keressük meg. A karakterisztikus egyenlet (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$), illetve annak gyökei:

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0,$$
$$\lambda^2 + 4 = 0,$$
$$\lambda = \pm 2i,$$

amelyből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = C_1 e^{0t} sin2t + C_2 e^{0t} cos2t = C_1 sin2t + C_2 cos2t, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ezt követően az inhomogén egyenlet partikuláris megoldására próbafüggvényt írunk fel (nincs rezonancia, a feladat egy nagyon egyszerű esetet tárgyal):

$$x_p(t) = Asint + Bcost.$$

Ennek deriváltjait behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe, majd az együtthatókat egyeztetve meg tudjuk határozni azok értékeit:

$$\dot{x}_p(t) = Acost - Bsint,$$
$$\ddot{x}_p(t) = -Asint - Bcost,$$
$$-Asint - Bcost + 4(Asint + Bcost) = sint,$$
$$A = \frac{1}{3}\ ;\ B = 0.$$

Tehát az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$x_p(t) = \frac{1}{3} sint\ .$$

A feladatban szereplő inhomogén differenciálegyenlet megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk:

$$x(t) = C_1 sin2t + C_2 cos2t + \frac{1}{3} sint, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kezdeti feltételek miatt szükség van a sebesség-idő függvényre is, emiatt deriváljuk az előbbi függvényt:

$$\dot{x}(t) = 2C_1 cos2t - 2C_2 sin2t + \frac{1}{3} cost.$$

A test kitérése $t = 0\ s$ időpillanatban 0 méter, a sebessége pedig $\frac{7}{3}\frac{m}{s}$, vagyis $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = \frac{7}{3}$. Ezeket behelyettesítve az $x(t)$ általános megoldásba, illetve annak deriváltjába:

$$\left.\begin{matrix} C_2 = 0 \\ 2C_1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \end{matrix}\right\}.$$

Ebből $C_1 = 1$ és $C_2 = 0$ adódik, tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$x_p(t) = sin2t + \frac{1}{3}sint.$$

A test kitérése az indulástól számított $\frac{\pi}{2}$ másodperc időpillanatban:

$$x_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = sin\pi + \frac{1}{3}sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}\ (m).$$

## 3. Összefoglalás

Egyetemünk hallgatói számára a matematika tanulása gyakran – főleg a korábbi hiányosságaik miatt – nehézségekkel jár. A differenciálegyenletek témakörét sokan az „értelmetlen” és „érthetetlen” jelzőkkel illetik. Nehéz megtalálnunk azokat a feladatokat és azt a tárgyalásmódot, amely az átlagos hallgató számára érthető. Az előbbi erősen leegyszerűsített gyakorlati alkalmazások segítségével a másodrendű differenciálegyenletek témakörét próbáltuk megvilágítani. A felsorolt példák ugyan – a témakör tulajdonságai miatt – igényelnek némi matematikai jártasságot, de bízunk benne, hogy a hallgatók ezekhez hasonló feladatok áttekintését követően bátrabban nyúlnak majd a felsőbb matematika eszközeihez.

## Irodalomjegyzék

[1] **Budó Ágoston**: Kísérleti fizika I-III. Tankönyvkiadó Budapest, 1978.
[2] **Geda Gábor**: Modellezés és szimuláció az oktatásban, Educatio Kht., 2011. https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_informatika_Geda_Gabor-Modellezes_es_szimulacio_az_oktatasban/ch04s05.html
[3] **Hatvani László** – **Pintér Lajos**: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában. Polygon, Szeged, 1997.
[4] **Kurics Tamás**: Differenciálegyenletek. ELTE Jegyzet, 2011. http://web.cs.elte.hu/~kuricst/bboard/notes/foldtuddiff_ea.pdf
[5] **Ponomarjov, K.K**.: Differenciálegyenletek felállítása és megoldása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
[6] **Scharnitzky Viktor**: Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
[7] **Szaszkó-Bogár Viktor**: Közönséges differenciálegyenletek. http://www.staff.u-szeged.hu/~vszaszko/ODE%2020130902.pdf
[8] **Terjéki József**: Differenciálegyenletek. Polygon, Szeged, 1997.

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
VIII. kötet, 2020 61–74

doi:10.20312/dim.2020.07

# Áttekintés a hiperbolikus Pascal háromszögekről

**Németh László, Szalay László**
Soproni Egyetem, Matematikai Intézet[1]
(nemeth.laszlo,szalay.laszlo)@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A binomiális együtthatók háromszög alakban való elrendezése, az ún. Pascal háromszög a matematika számos területén ismert és használt. A többirányú általánosítás, kiterjesztés közül most a hiperbolikus Pascal háromszögeket mutatjuk be összefoglaló jelleggel. A szokásos tulajdonságok analógiájának vizsgálata mellett a kizárólag hiperbolikus Pascal háromszögekre jellemző sajátosságokat is áttekintjük.

ABSTRACT. Pascal's triangle is a triangular arrangement of binomial coefficient, which is well known and used in several fields of mathematics. The family of hyperbolic Pascal triangles is a recently introduced variation among different kinds of generalizations and extentions. In this paper, we give a survey on hyperbolic Pascal triangles. Some properties have analogue in Pascal's classical triangle, but a few new phenomena have also been appeared.

## 1. Bevezetés

A binomiális együtthatók háromszög alakban való elrendezése már az ókori Indiában, Perzsiában és később Kínában is ismert volt. Az újkori matematikában Blaise Pascal volt az első, aki összefoglalta az addigi ismereteket erről az aritmetikai háromszögről [37]. Azóta a matematikának csaknem az összes területén használt, Pascalról elnevezett háromszögnek a kutatók számos érdekes és hasznos tulajdonságát fedezték fel és nagy számú általánosítását adták meg [1–4, 7, 8, 18, 20, 21, 29, 32, 41].

Most a Pascal háromszög egy újabb, a közelmúltban felfedezett általánosítását mutatjuk be összefoglaló jelleggel, amelyről egy rövid angol nyelvű áttekintés található a [6] publikációban. Mivel a klasszikus Pascal háromszög elemei egy négyzetrács csúcspontjaira is írhatók és az értékek egy kitüntetett csúcsponttól való legrövidebb rácsútvonalak számát adják, ezért ha az euklideszi négyzetrácsot kicseréljük hiperbolikus szabályos rácsra, vagy mozaikra, akkor a Pascal háromszög egy újabb változatát, a hiperbolikus Pascal háromszögeket kapjuk [5].

A következő fejezetben pontosan definiálni fogjuk a hiperbolikus Pascal háromszögek családját, és a klasszikus Pascal háromszög legismertebb tulajdonságait általánosítjuk a hiperbolikus esetre, megvizsgálva a hasonlóságokat és a különbségeket. Meghatározzuk a sorok elemeinek összegét, alternáló összegét, és hatványösszegét. Kapcsolatot keresünk a hiperbolikus Pascal háromszög sorainak egyfajta mintázata és a jól ismert bináris rekurzív sorozat, a Fibonacci szavak sorozata között. Továbbá megmutatjuk, hogy ha egy bizonyos hiperbolikus Pascal háromszöget irányított gráf formában adjuk meg, akkor a másodrendű rekurzív sorozatok egy jól definiálható osztályának elemei a gráfban egy-egy útvonal mentén megtalálhatók [5, 27, 34–36].

[1] KULCSSZAVAK. Hiperbolikus Pascal háromszög, rekurzív sorozatok.
KEYWORDS. Hiperbolic Pascal triangle, recursive sequences.

Végül az utolsó fejezetben említést teszünk a 3- és 4-dimenziós általánosítási lehetőségekről, a hiperbolikus Pascal piramisról és a hiperbolikus Pascal szimplexről [26, 28, 30].

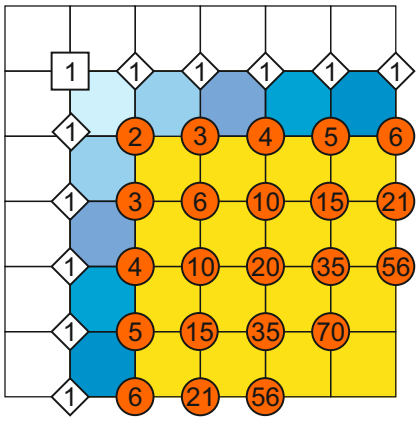
Érdemes megemlíteni, hogy a matematikán belül több területet is érintünk amikor a hiperbolikus Pascal háromszögeket vizsgáljuk. Az általánosítás alapja egy geometriai mintázat, amelyenek gráfelméleti megközelítése adja a megfelelő kombinatorikai értelmezést. A tulajdonságok feltérképezése közben időnként számelméleteti ismereteket, valamint a lineáris rekurzív sorozatok elméletét alkalmazzuk. Ettől válik széppé és izgalmassá a témakör, melynek szemléltetését a megértést segítő, színes ábrákkal fűszerezzük.

## 2. Hiperbolikus Pascal háromszögek

A hiperbolikus Pascal háromszöget a hiperbolikus szabályos mozaikokra alapozva definiáljuk, ezért először a szabályos mozaikok alapvető tulajdonságait foglaljuk össze röviden.

Egy síkbeli mozaikot szabályosnak nevezünk, ha a tartományai (cellái) és a csúcsalakzatai is szabályos poligonok. Ha egy szabályos mozaik cellái szabályos $p$-szögek és a mozaik csúcsainál lévő szögek mind $2\pi/q$ nagyságúak ($p, q \geq 3$), akkor ezt a szabályos mozaikot az un. $\{p, q\}$ Schläfli szimbólummal jelöljük. Ha $(p-2)(q-2) = 4$ teljesül, akkor a mozaik az euklideszi síkon realizálódik, ha $(p-2)(q-2) > 4$, vagy $(p-2)(q-2) < 4$, akkor a mozaik a hiperbolikus, illetve a szférikus síkon létezik ([9, 13, 40]). Az euklideszi síkon csak a $\{4,4\}$ négyzet-, a $\{3,6\}$ szabályos háromszög- és a $\{6,3\}$ szabályos hatszög mozaik létezik. Ezzel szemben a hiperbolikus síkon végtelen sok $\{p, q\}$ szabályos mozaik van, hiszen bármely szabályos sokszöggel képezhetünk mozaikot, ha a szögei megfelelő nagyságúak. A gömbfelületen a gömbi kétszögektől eltekintve a szabályos mozaikok a konvex szabályos poliédereknek felelnek meg, melyek mindegyike véges. További információk a hiperbolikus sík szabályos mozaikjairól többek között [9, 13, 25, 33, 40]-ben találhatók.

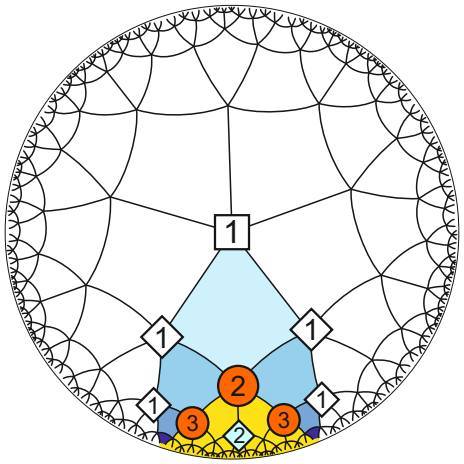
Tekintsük a jól ismert euklideszi $\{4,4\}$ négyzet mozaikot. Ezen kiválasztunk egy kezdő csúcspontot és e csúcspont által meghatározott valamelyik negyed mozaik minden egyes csúcspontjához (rácspontjához) hozzárendeljük azt a számot, ami az adott csúcspont és a kezdőpont közötti legrövidebb, rácsvonal menti utak számát adja. Ekkor a számok a jól ismert Pascal háromszöget adják. A háromszög sorait a kezdőponttól azonos rácsvonal menti távolságra lévő csúcspontok alkotják. Az 1. ábrán az euklideszi négyzetrácson vett klasszikus Pascal háromszög egy részlete látható.



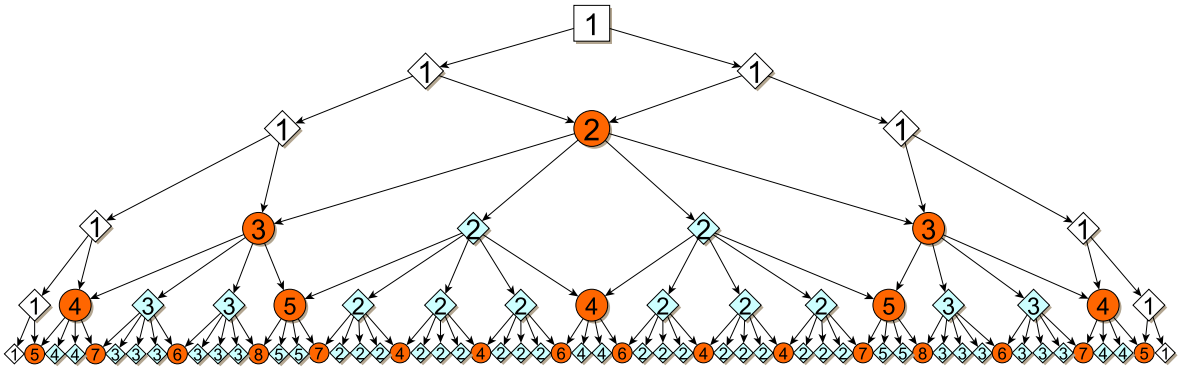

1. ábra. Pascal háromszög az euklideszi $\{4,4\}$ mozaikon

A fenti definíciót általánosítva a hiperbolikus sík szabályos mozaikjaira, a Pascal háromszög hiperbolikus megfelelőit kapjuk. A továbbiakban csak a $\{4, q\}$ $(q \geq 5)$ hiperbolikus négyzet

mozaikok esetén definiált hiperbolikus Pascal háromszögeket ($\mathcal{HPT}_{4,q}$) tekintjük. A 2. ábrán a $\mathcal{HPT}_{4,5}$ Pascal háromszög a $\{4,5\}$ mozaikkal együtt látható, ahol a hiperbolikus sík a Poincaré-féle körmodellel van szemléltetve [23,24]. Ha a hiperbolikus Pascal háromszöghöz tartozó mozaikrészletet gráfnak tekintjük, akkor a hiperbolikus Pascal háromszögeket irányított gráfként is megadhatjuk. A gráf éleit a mozaik élei adják, az irányítást a kezdőpontból (a 0. sortól) indítjuk. A 3. ábrán a $\mathcal{HPT}_{4,6}$ Pascal háromszög látható, ahol a csúcspontok közötti irányított gráfot is berajzoltuk.



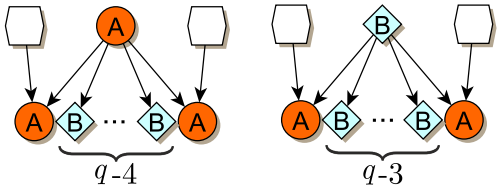
2. ábra. Pascal háromszög a hiperbolikus $\{4,5\}$ mozaikon



3. ábra. A $\{4,6\}$ mozaikra definiált hiperbolikus Pascal háromszög első néhány sora

A szélső pontoktól eltekintve minden hiperbolikus Pascal háromszögnek két típusú pontja létezik. Az $A$ típusú (az ábrákon piros – nyomtatásban sötét szürke – körrel jelöljük), melyeknek mindig két, az előző sorból bejövő éle van és az értéke a bejövő élek másik csúcspontjaihoz rendelt számok összege. A $B$ típusú (az ábrákon világos zöld – nyomtatásban világos szürke – csúcsára állított négyzettel jelöljük) csúcspontoknak csak egy bejövő éle van és az értéke megegyezik a bejövő élen levő másik csúcspont értékével. A maradék $q-2$, illetve $q-1$ él mind kimenő, a következő sorba mutató él lesz, melyek közül mindig kettő új $A$ típusú csúcspontba mutat, a többi pedig új, $B$ típusú csúcspontba. Ez a tulajdonság (4. ábra) lehetővé teszi, hogy megadjuk a $\mathcal{HPT}_{4,q}$ sorról sorra vett növekedésének ütemét.

Legyen $a_n$, illetve $b_n$ az $n$. sorban levő $A$ típusú, illetve $B$ típusú pontok száma, továbbá legyen $s_n = a_n + b_n + 2$, az $n$. sorban levő összes elem száma. Ekkor a következő tételt fogalmazhatjuk meg.




4. ábra. A $\mathcal{HPT}_{4,q}$ növekedési algoritmusa

**1. Tétel.** [5]. *Az* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *és* $\{s_n\}$ *sorozatok az*

$$x_n = (q-1)x_{n-1} - (q-1)x_{n-2} + x_{n-3} \qquad (n \geq 4) \tag{1}$$

*harmadrendű lineáris homogén rekurzióval adhatók meg, ahol a kezdőelemek*

$$a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, \quad b_0 = b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = q-4, \quad s_0 = 1, s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = q.$$

*Továbbá a sorozatok elemeinek explicit alakjai az alábbiak* ($n \geq 1$)*:*

$$a_n = \left(\frac{2-q}{2} + \frac{q^2-4q+2}{2q(q-4)}\sqrt{D}\right)\alpha_q^n + \left(\frac{2-q}{2} - \frac{q^2-4q+2}{2q(q-4)}\sqrt{D}\right)\beta_q^n + 1,$$
$$b_n = \left(\frac{q-3}{2} + \frac{1-q}{2q}\sqrt{D}\right)\alpha_q^n + \left(\frac{q-3}{2} - \frac{1-q}{2q}\sqrt{D}\right)\beta_q^n - 1,$$
$$s_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{q-2}{2q(q-4)}\sqrt{D}\right)\alpha_q^n + \left(-\frac{1}{2} - \frac{q-2}{2q(q-4)}\sqrt{D}\right)\beta_q^n + 2,$$

*ahol*

$$D = q^2 - 4q, \qquad \alpha_q = \frac{(q-2)+\sqrt{D}}{2}, \qquad \beta_q = \frac{(q-2)-\sqrt{D}}{2}.$$

## 2.1. Sorok elemeinek összege a hiperbolikus Pascal háromszögekben

Jól ismert, hogy a klasszikus Pascal háromszög $n$. sorában levő elemek összege $2^n$. A hiperbolikus Pascal háromszögek esetén is megadhatjuk ezt az összeget, amelyet egy újabb harmadrendű lineáris rekurzió ír le.

Jelölje $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ , illetve $\hat{s}_n$ az $n$. sorbeli $A$ típusú, $B$ típusú, illetve az összes elem értékének összegét. Ekkor a következő tételt kapjuk.

**2. Tétel.** [5]. *Az* $\{\hat{a}_n\}$, $\{\hat{b}_n\}$ *és* $\{\hat{s}_n\}$ *sorozatok ugyanazzal a harmadrendű homogén lineáris rekurzióval adhatók meg, amely az*

$$x_n = qx_{n-1} - (q+1)x_{n-2} + 2x_{n-3} \qquad (n \geq 4)$$

*rekurzió. A kezdőelemek pedig* $\hat{a}_0 = \hat{a}_1 = 0$, $\hat{a}_2 = 2$, $\hat{a}_3 = 6$, $\hat{b}_0 = \hat{b}_1 = 0$, $\hat{b}_2 = 0$, $\hat{b}_3 = 2(q-4)$, $\hat{s}_0 = 1$, $\hat{s}_1 = 2$, $\hat{s}_2 = 4$, $\hat{s}_3 = 2q$. *Továbbá ha* $n \geq 1$*, akkor*

$$\hat{a}_n = \left(\frac{1-q}{2} + \frac{q^2-2q-3}{2(q^2-2q-7)}\sqrt{D}\right)\hat{\alpha}_q^n + \left(\frac{1-q}{2} - \frac{q^2-2q-3}{2(q^2-2q-7)}\sqrt{D}\right)\hat{\beta}_q^n + 2,$$
$$\hat{b}_n = \left(\frac{q-2}{2} - \frac{q^2-3q-2}{2(q^2-2q-7)}\sqrt{D}\right)\hat{\alpha}_q^n + \left(\frac{q-2}{2} + \frac{q^2-3q-2}{2(q^2-2q-7)}\sqrt{D}\right)\hat{\beta}_q^n - 2,$$
$$\hat{s}_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{q-1}{2(q^2-2q-7)}\sqrt{D}\right)\hat{\alpha}_q^n + \left(-\frac{1}{2} - \frac{q-1}{2(q^2-2q-7)}\sqrt{D}\right)\hat{\beta}_q^n + 2$$

*explicit formák is fennállnak a sorozatok elemeire, ahol*

$$D = q^2 - 2q - 7, \qquad \hat{\alpha}_q = \frac{(q-1)+\sqrt{D}}{2}, \qquad \hat{\beta}_q = \frac{(q-1)-\sqrt{D}}{2}.$$

## 2.2. Alternáló összegek a hiperbolikus Pascal háromszögekben

A klasszikus binomiális együtthatók mintájára jelölje $\left|\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right|$ a hiperbolikus Pascal háromszög $n$. sorának $i$. elemét ($0 \le n$, $0 \le i \le s_n - 1$). Továbbá legyen $\widetilde{s}_n$ az $n$. sor alternáló összege. Kezdjük az összegzést balról, pozitív együtthatóval, tehát

$$\widetilde{s}_n = \sum_{i=0}^{s_n-1} (-1)^i \left|\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right|.$$

A klasszikus Pascal háromszög esetén az $\{\widetilde{s}_n\}_{n\ge1}$ sorozat a konstans 0 sorozat, míg a hiperbolikus Pascal háromszög esetére az alternáló összeget a 3. tétel adja. Páros $q$ esetén minden második, míg páratlan $q$ esetén pedig minden harmadik sor esetén kapunk zéró alternáló összeget a $\mathcal{HPT}_{4,q}$ soraira.

**3. Tétel.** [34]. *Ha $q$ páros, akkor*

$$\widetilde{s}_n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n = 2t+1, \quad n \ge 1; \\ -2(5-q)^{t-1} + 2, & \text{ha} \quad n = 2t, \quad n \ge 2 \end{cases}$$

*és $\widetilde{s}_0 = 1$. Továbbá, ha $q \ge 5$ és páratlan, akkor*

$$\widetilde{s}_n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n = 3t+1, \quad n \ge 1; \\ (-2)^t (q-5)^{t-1} + 2, & \text{ha} \quad n = 3t-1, \quad n \ge n_1; \\ 2(-2)^t (q-5)^{t-1} + 2, & \text{ha} \quad n = 3t, \quad n \ge n_2, \end{cases}$$

*ahol $n > 5$ esetén $(n_1, n_2) = (2,3)$, $n = 5$ esetén pedig $(n_1, n_2) = (5,6)$. Továbbá $\widetilde{s}_0 = 1$, $\widetilde{s}_2 = 0$ és $\widetilde{s}_3 = -2$.*

Megjegyezzük, hogy a 3. tétel nemcsak a hiperbolikus $q \ge 5$ eseteket tartalmazza, hanem az euklideszi $q = 4$ esetet is.

A $q = 5$ és $q = 6$ háromszögekre érdemes megvizsgálni külön-külön is az $\{\widetilde{s}_n\}$ sorozatot, melyet a következők. (A nem 0 alternáló sorösszegek is konstans sorozatot alkotnak.)

**4. Következmény.** [5, 34]. *Ha $q = 5$, akkor*

$$\widetilde{s}_n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n = 3t+1, \ n \ge 1; \\ 2, & \text{ha} \quad n \ne 3t+1, \ n \ge 5. \end{cases}$$

*Ha $q = 6$, akkor*

$$\widetilde{s}_n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n \ne 4t, \quad n \ge 1; \\ 4, & \text{ha} \quad n = 4t, \quad n \ge 4. \end{cases}$$

Pascal háromszögnél és azok általánosításainál szokás súlyozott sorösszeget is számolni. Jelölje $v$ és $w$ balról tekintve a páros, illetve a páratlan elemhez tartozó súlyt minden sor esetén. (Alternáló összeg esetén $v = 1$ és $w = -1$.) Ekkor a következő állítást kapjuk.

**5. Következmény.** [34].

$$\begin{aligned} \widetilde{s}_{(v,w),n} &= \sum_{i=0}^{s_n-1} \left(v\delta_{0,\,i \bmod 2} + w\delta_{1,\,i \bmod 2}\right) \left|\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right| = \frac{\hat{s}_n + \widetilde{s}_n}{2} v + \frac{\hat{s}_n - \widetilde{s}_n}{2} w \\ &= \frac{v+w}{2} \hat{s}_n + \frac{v-w}{2} \widetilde{s}_n, \end{aligned}$$

*ahol $\delta_{j,i}$ a Kronecker delta függvény.*

## 2.3. Hatványösszegek a hiperbolikus Pascal háromszögekben

Egy sokat vizsgált tulajdonsága a Pascal háromszögnek (és más aritmetikai háromszögeknek) a sorok elemeinek valahányadik hatványösszege, illetve ezek sorozatai. Legyen $S_k(n)$ a klasszikus Pascal háromszög $n$. sorában lévő elemek $k$. hatványösszege, azaz

$$S_k(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^k, \quad n \geq 0, \quad k \in \{0,1,2,\ldots\}. \tag{2}$$

Ekkor $S_0(n) = n+1$, az elemek száma; $S_1(n) = 2^n$, a sorokban lévő elemek értékeinek összege és

$$S_2(n) = \binom{2n}{n}, \tag{3}$$

a centrál binomiális együtthatók sorozata. További hatványokra az $S_k(n)$ sorozatnak nincs általános, explicit megadása. A $3 \leq k \leq 10$ esetekre csak függvény együtthatójú rekurzív megadás létezik, továbbá a $3 \leq k \leq 9$ esetekre nincs zárt alakja az összegeknek, csak aszimptotikus ([15, 16]). Például, ha $k = 3$, akkor a hatványösszeget az

$$S_3(n+1) = \frac{7n^2+7n+2}{(n+1)^2} S_3(n) + \frac{8n^2}{(n+1)^2} S_3(n-1) \tag{4}$$

formában adhatjuk meg, ahol a rekurziós együtthatók is $n$-től függnek. A probléma nehézségét az is mutatja, hogy nincsenek eredmények $k$ nagyobb eseteire. (A binomiális együtthatók hatványösszegeiről további részletek [10, 11, 19]-ben találhatók.)

A klasszikus Pascal háromszögnél sokkal bonyolultabb szerkezetű hiperbolikus Pascal háromszögek esetén viszont meglepő módon lineáris együtthatójú rekurzív sorozatokkal leírhatjuk a háromszög egy sorban levő elemeinek hatványösszeg sorozatát (lásd [36]).

A (2) hatványösszeg sorozat hiperbolikus Pascal háromszögekre definiált analógja legyen az

$$(s^k)_n = \sum_{i=0}^{s_n-1} \binom{n}{i}^k, \quad n \geq 0, \quad k \in \{0,1,2,\ldots\}.$$

Most is igaz, hogy a sorozat $k = 0$ esetén a hiperbolikus Pascal háromszög $n$. sorának elemeinek a száma, azaz $(s^0)_n = s_n$, valamint $k = 1$ esetén az elemek értékeinek összege, azaz $(s^1)_n = \hat{s}_n$. A további $k \geq 2$ esetek vizsgálatához vezessünk be újabb jelöléseket. Legyen $(a^k)_n$, illetve $(b^k)_n$ az $n$. sor $A$ , illetve $B$ típusú értékeinek $k$. hatványának összege. A $\mathcal{HPT}_{4,q}$ sorainak két szélső 1-es elemét most a $B$ típusú elemek közé soroljuk be. Ekkor egyértelműen $(s^k)_n = (a^k)_n + (b^k)_n$.

Tekintsük a $\mathcal{HPT}_{4,q}$ két egymást követő $\binom{n}{\ell}$ és $\binom{n}{\ell+1}$ elemét. Ezek típusa legyen $X$ és $Y$, melyek nem feltétlen különböző $A$ vagy $B$ típusú pontok. Legyen ezen elemek $i$. és $j$. hatványszorzata $x^i y^j = \binom{n}{\ell}^i \cdot \binom{n}{\ell+1}^j$ és legyen az összes ilyen jellegű (amikor az első elem $X$, a második $Y$ típusú) $n$. sorbeli szorzat összege $(x^i y^j)_n$-nel jelölve. Ekkor a $\mathcal{HPT}_{4,q}$ szimmetriájából következik, hogy $(a^i b^j)_n = (b^j a^i)_n$. Továbbá, mivel az azonos sorban levő egymást követő $B$ típusú elemek egyenlőek, ezért $(b^{i-1}b)_n = (b^{i-2}b^2)_n = \cdots = (bb^{i-1})_n$ is teljesül.

Ekkor felírhatjuk a következő $k+2$ egyenletből álló inhomogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
(a^k)_{n+1} &= 2(a^k)_n + 2\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}(a^{k-i}b^i)_n + 2(b^k)_n + (2^k-2)u_n - 2,\\
(a^{k-j}b^j)_{n+1} &= (a^k)_n + \sum_{i=0}^{k-j-1}\binom{k-j}{i}(a^{k-j-i}b^{j+i})_n + \sum_{i=0}^{k-j-1}\binom{k-j}{i}(a^{j+i}b^{k-j-i})_n\\
&\quad +(b^k)_n + (2^{k-j}-1)u_n - 1,\\
(b^k)_{n+1} &= (q-4)(a^k)_n + (q-3)(b^k)_n - 2(q-4),\\
u_{n+1} &= (q-5)(a^k)_n + (q-4)(b^k)_n - 2(q-4),
\end{aligned}$$

ahol $j = 1, \ldots, k-1$.

Az egyenletrendszerből az $(a^k)_n$ és $(b^k)_n$ sorozatok meghatározása az egyenletrendszer bonyolultsága miatt sajnos nem egyszerű, de mivel az egyenletek karakterisztikus polinomjai megegyeznek az egyenletrendszerhez tartozó együtthatómátrix karakterisztikus polinomjával (lásd [31, 36]), ezért a mátrix egyszerűsítése a sorozatok megadásának egyszerűsítését is jelenti. Ennek az együttható mátrixnak egy egyszerűbb, karakterisztikus polinomját könnyebben meghatározó formára való transzformálásának egy lehetséges módszere található [36]-ben. Továbbá a $2 \le k \le 11$ esetekre a konkrét rekurzív sorozatok is megadottak, melynek fokszáma $\lfloor k/2 \rfloor + 3$. Ezeket a sorozatokat $k = 2$ és $k = 3$ esetekre a klasszikus Pascal háromszög hasonló sorozatainak összevetése miatt megadjuk (lásd (3) és (4)), azaz

$$\begin{aligned}
(s^2)_n &= q(s^2)_{n-1} - (q+1)(s^2)_{n-2} + 2(s^2)_{n-3} && (n \ge 3),\\
(s^3)_n &= (q+2)(s^3)_{n-1} - (q+7)(s^3)_{n-2} + 8(s^3)_{n-3} - 2(s^3)_{n-4} && (n \ge 4).
\end{aligned}$$

A kezdőelemek a $\mathcal{HPT}_{4,q}$ első három, illetve négy sorából könnyedén meghatározhatók.

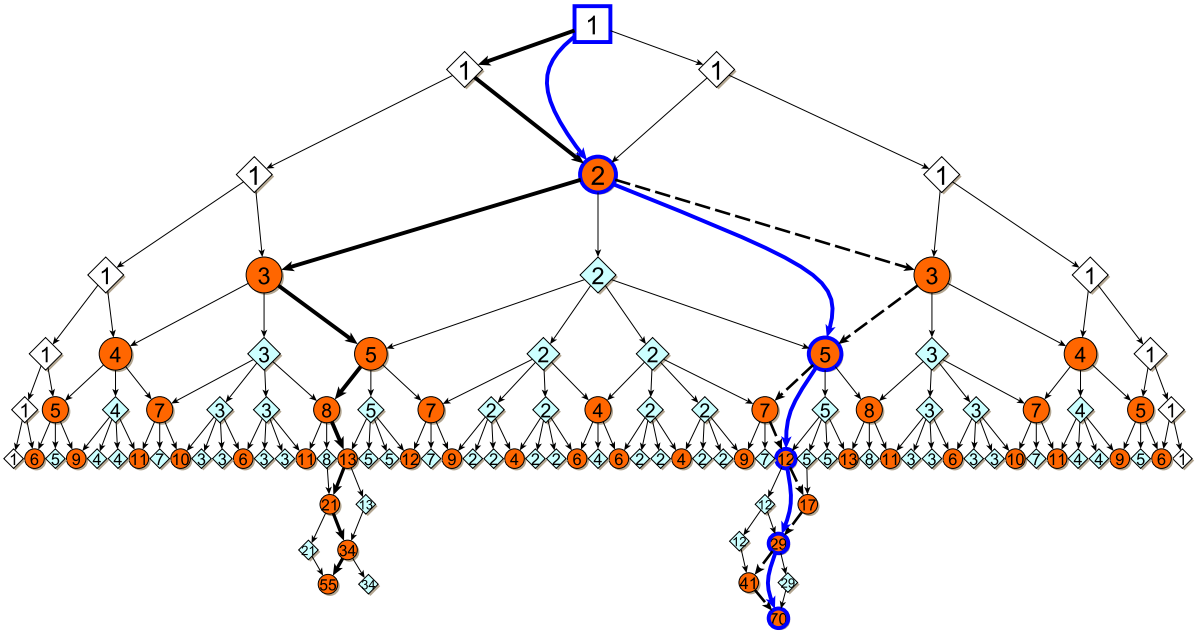
## 2.4. Másodrendű rekurzív sorozatok a $\mathcal{HPT}_{4,5}$ háromszögekben

Figyeljük meg az 5. ábrán a $\mathcal{HPT}_{4,5}$ háromszöget! Minden $A$ típusú pontból a következő sor egy elemére egy él balra-le, egy jobbra-le és egy középen-le mutat. A balra-le, illetve a jobbra-le irányokat hívjuk röviden balra és jobbra irányoknak és jelöljük őket az angol megfelelőik alapján $L$-lel és $R$-rel. (A szélső 1-es elemekből is balra és jobbra irányokkal jutunk a következő sorba.) A legfelső elemtől kiindulva lépkedjük a gráf élei mentén az irányításnak megfelelően egyet balra, utána egyet jobbra, majd újra egyet balra és egyet jobbra, és így tovább. Ekkor a csúcspontok értékei éppen az $(n+1)$. Fibonacci számok (Fibonacci sorozat: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$), melyek egyben az aktuális sorok legnagyobb értékei is. Másodjára újra tekintsünk egy útvonalat a gráf élei mentén a legfelső elemből kiindulva. Lépjünk egyet balra, majd egyet jobbra, utána egyet újra jobbra, majd balra, és így tovább. Az így kapott útvonal minden második csúcspontja a Pell sorozat $(n+1)$. elemét adja (Pell sorozat: $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, $P_0 = 0$, $P_1 = 1$). Ekkor a Fibonacci sorozat elemei az $L$ és az $R$ lépések egymásutánjaként adódnak, míg a Pell sorozat elemeit az $LR$ és az $RL$ lépések után kapjuk.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen másodrendű rekurzív sorozatok elemei találhatók meg a $\mathcal{HPT}_{4,5}$-ben a Fibonacci és Pell sorozatokhoz hasonló bejárással.

Mivel $\binom{i}{1} = i$, ezért triviálisan igaz, hogy bármely pozitív egész szám megjelenik a hiperbolikus Pascal háromszögekben. Sőt, a következő 6. tétel szerint bármely két pozitív egész szám is megtalálható egymás mellett egy azonos sorban a $\mathcal{HPT}_{4,5}$ háromszögben.

**6. Tétel.** [5] *Legyen adott $u, v \in \mathbb{N}^+$, ekkor létezik $i, j \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $u = \binom{i}{j}$ és $v = \binom{i}{j+1}$ teljesül.*



5. ábra. A Fibonacci és a Pell sorozat a $\mathcal{HPT}_{4,5}$ háromszögben

**7. Tétel.** [5]. *Legyen $\alpha$ és $f_0 < f_1$ pozitív egész, ahol $f_0$ és $f_1$ relatív prímek. Továbbá legyen $\{f_n\}$ egy bináris rekurzív sorozat az*

$$f_n = \alpha f_{n-1} + f_{n-2}, \quad (n \geq 2),$$

*alakban megadva. Ekkor az $f_0$ és $f_1$ értékek megtalálhatók egymás mellet $\mathcal{HPT}_{4,5}$ valamelyik sorában úgy, hogy $f_1$ típusa $A$. Továbbá az $\{f_n\}$ sorozat minden eleme megtalálható egy, az $f_1$ csúcspontból kiinduló, csak $A$ típusú csúcspontokon áthaladó útvonal mentén úgy, hogy az egymást követő $f_j$ és $f_{j+1}$ $(j \geq 1)$ elemek éltávolsága $\alpha$.*

A továbbiakban legyen $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sorozat az

$$f_n = \alpha f_{n-1} - f_{n-2}, \qquad (n \geq 2), \tag{5}$$

rekurzióval definiálva, ahol $\alpha \in \mathbb{N}^+$, $\alpha \geq 2$, valamint $f_0 < f_1$ pozitív egészek és relatív prímek. Megjegyezzük, hogy ha $\alpha = 2$, akkor $\{f_n\}$ egy számtani sorozat.

A következő tételben megadjuk egy útvonalát a $\mathcal{HPT}_{4,5}$ háromszögnek, amely tartalmazza az (5) sorozat elemeit. Az azonos irányú lépéseket röviden hatvány alakban írjuk. Például $LR^{\alpha-1}$ azt jelenti, hogy $f_{n-1}$-ből kiindulva $A$ típusú pontokon keresztül lépve egyet balra, majd $(\alpha-1)$-et jobbra az $f_n$-t kapjuk.

**8. Tétel.** [35]. *Létezik olyan $A$ típusú csúcspontokon áthaladó útvonala a $\mathcal{HPT}_{4,5}$-nek, ahol a következőképpen megadott csúcspontok az $\{f_n\}_{n\geq 1}$ sorozat elemei. Tegyük fel, hogy $\binom{i}{j} = f_1$ és $\binom{i}{j-1} = f_1 - f_0$. Ekkor az útvonal első eleme $f_1$ és a lépések mintázata $f_{n-1}$ és $f_n$ között $LR^{\alpha-2}$.*

Összegezve, az $f_n = \alpha f_{n-1} \pm f_{n-2}$ típusú sorozatok elemei mind megtalálhatók $\mathcal{HPT}_{4,5}$-ben, melyekhez a lépések mintázata is ismert. Ezt foglalja össze az 1. táblázat [6]. Mivel a sorozatok kezdőértékei tetszőlegesek lehetnek, ezért a sorozatok pontos helyét nem tudjuk megadni, csak a lépések mintázatát.

| | $f_n = \alpha f_{n-1} + f_{n-2}$ | $f_n = \alpha f_{n-1} - f_{n-2}$ |
|---|---|---|
| feltétel | $\alpha \geq 1$ | $\alpha \geq 2$ |
| $f_n$ és $f_{n-1}$ távolsága | $\alpha$ | $\alpha - 1$ |
| lépések mintázata | $LR^{\alpha-1}$ és $RL^{\alpha-1}$ váltakozva | $LR^{\alpha-2}$ |

1. táblázat. Az $f_n = \alpha f_{n-1} \pm f_{n-2}$ sorozatok megadása

## 2.5. Fibonacci szó és a hiperbolikus Pascal háromszögek kapcsolata

Az egyik legnépszerűbb és a legtöbbet vizsgált bináris sorozat a Fibonacci szó ("Fibonacci word"). Először definiáljuk az $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ véges Fibonacci szó sorozatot $\{0,1\}$ felett. (A sorozatnak minden eleme véges számú bitet tartalmaz.) Legyen

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 0 \text{ és } f_i = f_{i-1}f_{i-2}, \qquad (i \geq 2),$$

azaz a kezdőelemek kivételével a sorozatnak minden eleme az előző két elem konkatenációjával adható meg. Nyilvánvalóan igaz a Fibonacci szó hosszára ($|g|$ a $g$ szó hosszát jelöli), hogy $|f_i| = F_{i+1}$, ahol $F_i$ az $i$. Fibonacci szám, amely definíciója: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ $(i \geq 2)$. A (végtelen) Fibonacci szó pedig az $\boldsymbol{f} = \lim_{i\to\infty} f_i$. A 2. táblázat az első néhány Fibonacci szót mutatja.

Az is ismert, hogy a Fibonacci morfizmus ($\sigma\colon \{0,1\} \to \{0,1\}*$, $0 \to 01$, $1 \to 0$) fennáll két egymást követő véges Fibonacci szó között. További részletek és általánosítások többek között [12, 14, 22, 38, 39]-ben találhatók.

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1\\
f_1 &= 0\\
f_2 &= 01\\
f_3 &= 010\\
f_4 &= 01001\\
f_5 &= 01001010\\
f_6 &= 0100101001001\\
f_7 &= 01001010010010100 1010
\end{aligned}$$

2. táblázat. Az első néhány Fibonacci szó

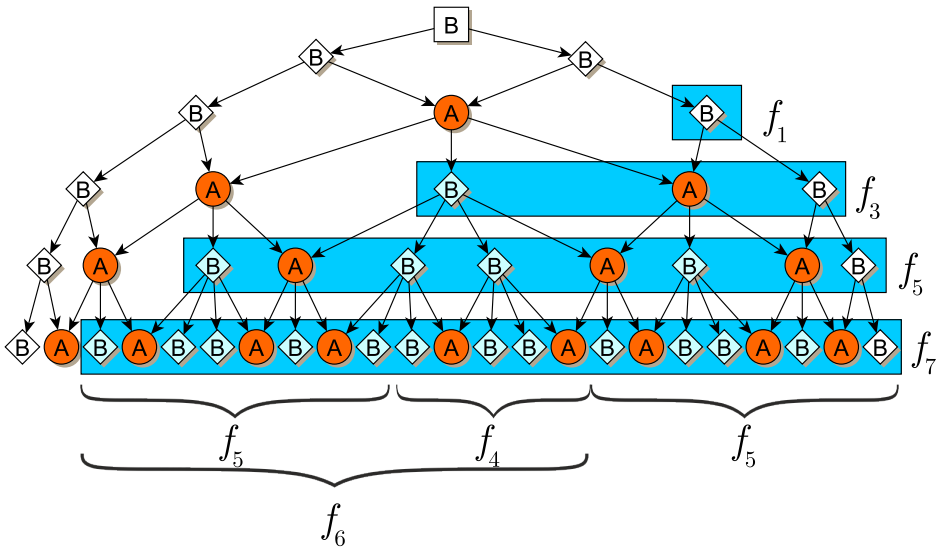
A továbbiakban minden $\mathcal{HPT}_{4,q}$ esetén eltekintünk a csúcspontokhoz rendelt értéktől, csak a csúcspontok típusát vesszük figyelembe (6. ábra). A széleken lévő csúcspontokat is $B$ típusúaknak tekintjük.

Definiáljuk úgy a $\{h_n^{[q]}\}_0^{\infty}$ sorozatot, hogy minden $h_n^{[q]}$ elem legyen egyenlő a $\mathcal{HPT}_{4,q}$ $n$. sorában levő balról jobbra vett $A$ és $B$ jelek konkatenációjával. Ezt nevezzük $n$. (véges) $\{4,q\}$-hiperbolikus Pascal szónak. Például, ha $q = 5$, akkor a 6. ábra sorai alapján

$$\begin{aligned}
h_0^{[5]} &= B,\ h_1^{[5]} = BB,\ h_2^{[5]} = BAB,\ h_3^{[5]} = BABAB,\ h_4^{[5]} = BABABBABAB,\\
h_5^{[5]} &= BABABBABABBABBABABBABAB.
\end{aligned}$$

Tekintsük a $\phi$ bijekciót úgy, hogy

$$\phi : \{0,1\} \to \{A,B\}, \qquad \phi(1) = A, \qquad \phi(0) = B,$$




6. ábra. A véges Fibonacci szó sorozat a $\mathcal{HPT}_{4,5}$-ben

vagy röviden $1 \equiv A$ és $0 \equiv B$.

Vizsgálva a 6. ábrát láthatjuk, hogy a Pascal háromszög sorainak mintázata csaknem ekvivalens a páratlan Fibonacci szavakéval. Például

$$\begin{aligned} 01f_1 = 010 &\equiv BAB = h_2^{[5]}, \\ 01f_3 = 01010 &\equiv BABAB = h_3^{[5]}, \\ 01f_5 = 0101001010 &\equiv BABABBABAB = h_4^{[5]}, \end{aligned}$$

A pontos, általános kapcsolatot a 9. és a 10. tételekben fogjuk kimondani, de előtte még megadunk a Fibonacci szónak egy új általánosítását, ami a $\mathcal{HPT}_{4,q}$ háromszög sorainak az $A$ és $B$ pontjainak mintázatán alapszik.

Legyen a véges $\{4,q\}$-Fibonacci szó sorozata $\{f_i^{[4,q]}\}_{i=0}^{\infty}$, röviden $\{f_i^{[q]}\}_{i=0}^{\infty}$, ahol $q \geq 5$ és

$$f_0^{[q]} = 1,\ f_1^{[q]} = 0,\ f_i^{[q]} = \begin{cases} \left(f_{i-1}^{[q]}\right)^{q-4} f_{i-2}^{[q]}, & \text{ha } i \text{ páros;} \\ f_{i-1}^{[q]} f_{i-2}^{[q]}, & \text{ha } i \text{ páratlan;} \end{cases} \qquad (i \geq 2).$$

A végtelen $\{4,q\}$-Fibonacci szó is legyen $\boldsymbol{f}^{[q]} = \lim_{i\to\infty} f_i^{[q]}$ és ekkor természetesen $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^{[5]}$, azaz a $\{4,5\}$-Fibonacci szó egybeesik a (klasszikus) Fibonacci szóval.

Jelölje $\sigma^{[q]}$ a $\{4,q\}$-Fibonacci morfizmust, melyet $q \geq 5$ esetekre a következőképpen definiálunk

$$\{0,1\} \to \{0,1\}*, \quad 0 \to 0^{q-4}10,\ 1 \to 0^{q-4}1.$$

A következő tételek megmutatják a pontos kapcsolatot a $\{4,q\}$-hiperbolikus Pascal szó sorozata (a $\mathcal{HPT}_{4,q}$ sorainak mintázata) és az újonnan definiált $\{4,q\}$-Fibonacci szó sorozata között.

**9. Tétel.** [27]. *A $\{4,q\}$-Fibonacci morfizmus, a $\sigma^{[q]}$, kapcsolatot teremt minden második $\{4,q\}$-Fibonacci szó között, úgy hogy*

$$\sigma^{[q]}(f_{i-2}^{[q]}) = f_i^{[q]} \qquad (i \geq 2).$$

**10. Tétel.** [27]. *Ha* $n \geq 2$, *akkor*

$$01 f_{2n-3}^{[q]} \equiv h_n^{[q]}$$

*és*

$$|f_{2n-3}^{[q]}| = F_{2n-2}^{(1,q-4)},$$

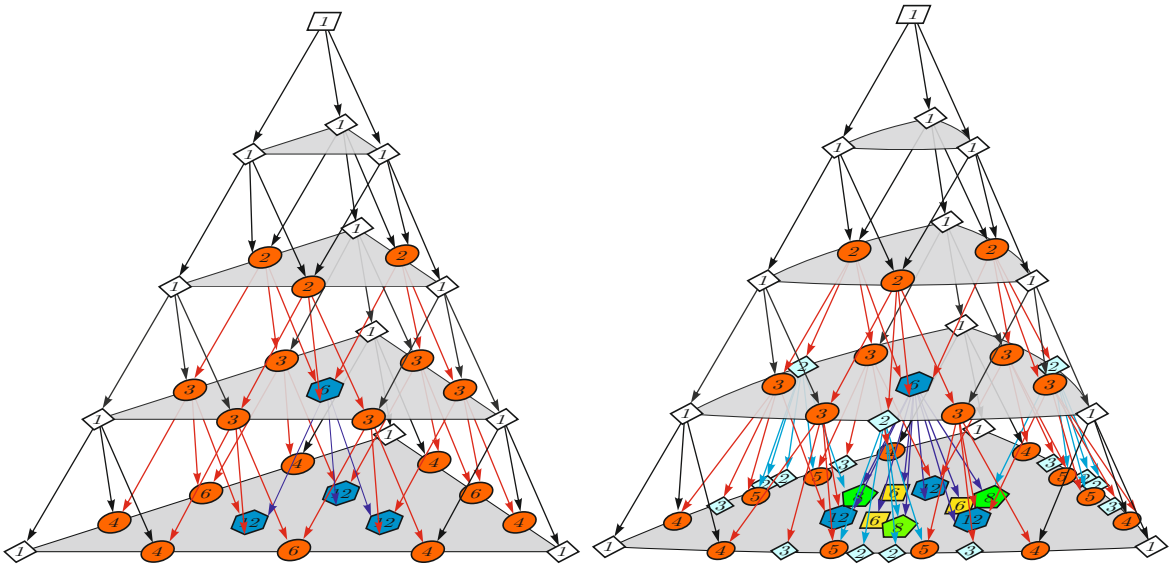
*ahol* $1 \equiv A$, $0 \equiv B$ *és* $|h_n^{[q]}| = s_n$. *Továbbá az* $\{F_i^{(a,b)}\}_{i=0}^{\infty}$ *sorozat az un. biperiodikus Fibonacci sorozat* $(a \geq 1, b \geq 1)$ *[12, 27, 39], amelynek rekurzív definíciója az*

$$F_0^{(a,b)} = 0,\ F_1^{(a,b)} = 1,\ F_i^{(a,b)} = \begin{cases} aF_{i-1}^{(a,b)} + F_{i-2}^{(a,b)}, & \text{ha } i \text{ páros;} \\ bF_{i-1}^{(a,b)} + F_{i-2}^{(a,b)}, & \text{ha } i \text{ páratlan;} \end{cases} \quad (i \geq 2).$$

# 3. Hiperbolikus Pascal piramis és szimplex

A Pascal háromszög 3-dimenziós analógja a Pascal piramis (sokkal precízebben a Pascal tetraéder) (a 7. ábrának a bal oldali részábrája). Itt a szintek háromszögek, az $n$. szint oldalai megegyeznek a Pascal háromszög $n$. soraival és minden belső szám egyenlő a megelőző szinten közvetlenül "fölötte" levő három szám összegével [2, 8, 17, 18]. A Pascal piramis 4-dimenziós változatát Pascal szimplexnek nevezzük.

A hiperbolikus 3- és 4-dimenziós térben is létezik egy hiperbolikus kockamozaik, illetve egy hiperbolikus hiperkocka mozaik, amelyek segítségével Pascal piramis, illetve a Pascal szimplex hiperbolikus változatait, a hiperbolikus Pascal piramist és a hiperbolikus Pascal szimplexet definiálhatjuk. A pontos definíciókat és a tulajdonságokat itt nem részletezzük (teljes leírás: [26, 28]), helyette a 7. ábrának a jobb oldali részábráján bemutatjuk a hiperbolikus Pascal piramis első néhány szintjét és a szintek közötti irányított gráfot.



7. ábra. Euklideszi és hiperbolikus Pascal piramis

# 4. Irodalomjegyzék

[1] **Ahmia, M. and Belbachir, H.**: *Preserving log-convexity for generalized Pascal triangles*, The Electronic Journal of Combinatorics, **19** (2012), No. 2, Paper P16. doi: 10.37236/2255.

[2] **Anatriello, G. and Vincenzi, G.**: *Tribonacci-like sequences and generalized Pascal's pyramids*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **45** (2014), No. 8, 1220–1232. doi: 10.1080/0020739X.2014.914283.

[3] **Barry, P.**: *On integer-sequence-based constructions of generalized Pascal triangles*, Journal of Integer Sequences, **9** (2006), Article 06.2.4.

[4] **Barry, P.**: *On a family of generalized Pascal triangles defined by exponential Riordan arrays*, Journal of Integer Sequences, **10** (2007), Article 07.3.5.

[5] **Belbachir, H., Németh, L., and Szalay, L.**: *Hyperbolic Pascal triangles*, Applied Mathematics and Computation, **273** (2016), 453–464. doi: 10.1016/j.amc.2015.10.001.

[6] **Belbachir, H., Németh, L., and Szalay, L.**: *Properties of hyperbolic Pascal triangles*, AIP Conference Proceedings, **1867** (2017), No. 1, 020031–1—020031–5. doi: 10.1063/1.4994434.

[7] **Belbachir, H. and Szalay, L.**: *On the arithmetic triangles*, Šiauliai Mathematical Seminar, **9** (2014), No. 17, 15–26.

[8] **Bondarenko, B. A.**: *Generalized Pascal Triangles and Pyramids, Their Fractals, Graphs, and Applications*, Fibonacci Association, Santa Clara, CA, 1993.

[9] **Coxeter, H. S. M.**: *Regular honeycombs in hyperbolic space*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, **3** (1956), 155–169.

[10] **Cusick, T. W.**: *Recurrences for sums of powers of binomial coefficients*, Journal of Combinatorial Theory Series A, **52** (1989), No. 1, 77–83.

[11] **Dzhumadil'daev, A. and Yeliussizov, G.**: *Power sums of binomial coefficients*, Journal of Integer Sequences, **16** (2013), Article 13.1.4.

[12] **Edson, M. and Yayenie, O.**: *A new generalization of Fibonacci sequence & extended Binet's formula*, Integers. Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, **9** (2009), No. 6, 639–654. doi: 10.1515/INTEG.2009.051.

[13] **Fejes Tóth, L.**: *Regular Figures*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964.

[14] **Fici, G.**: *Factorizations of the Fibonacci infinite word*, Journal of Integer Sequences, **18** (2015), Article 15.9.3.

[15] **Franel, J.**: *On a question of Laisant*, L'intermédiaire des Mathématiciens, **1** (1894), 45–47.

[16] **Franel, J.**: *On a question of J. Franel*, L'intermédiaire des Mathématiciens, **2** (1895), 33–35.

[17] **Harris, J. M., Hirst, J. L., and Mossinghoff, M. J.**: *Combinatorics and Graph Theory*, Springer, 2008. doi: 10.1007/978-0-387-79711-3.

[18] **Hilton, P. and Pedersen, J.**: *Mathematics, models, and magz, Part I: Patterns in Pascal's triangle and tetrahedron*, Mathematics Magazine, **85** (2012), No. 2, 97–109. doi: 10.4169/math.mag.85.2.097.

[19] **Jin, Y., Lu, Z.-J., and Schmidt, A. L.**: *On recurrences for sums of powers of binomial coefficients*, Journal of Number Theory, **128** (2008), No. 10, 2784 – 2794. doi: 10.1016/j.jnt.2008.03.011.

[20] **Kallós, G.**: *The generalization of Pascal's triangle from algebraic point of view*, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae, **24** (1997), 11–18.

[21] **Kallós, G.**: *A generalization of Pascal's triangle using powers of base numbers*, Annales mathématiques Blaise Pascal, **13** (2006), No. 1, 1–15. doi: 10.5802/ambp.211.

[22] **Lothaire, M.**: *Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1983.

[23] **Németh, L.**: *Connections of the different models of the hyperbolic plane*, A Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei. Természettudományok, **10** (1996), No. 5, 39–64.

[24] **Németh, L.**: *On the models of the hyperbolic plane*, Teaching Mathematics and Computer Science, **52** (2004), No. 1, 203–206. doi: 10.5485/TMCS.2004.0061.

[25] **Németh, L.**: *Trees on hyperbolic lattices*, Miskolc Mathematical Notes, **16** (2015), No. 1, 353–360. doi: 10.18514/MMN.2015.783.

[26] **Németh, L.**: *On the hyperbolic Pascal pyramid*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, **57** (2016), No. 4, 913–927. doi: 10.1007/s13366-016-0293-7.

[27] **Németh, L.**: *Fibonacci words in hyperbolic Pascal triangles*, Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, **9** (2017), No. 2, 336–347. doi: 10.1515/ausm-2017-0025.

[28] **Németh, L.**: *Hyperbolic Pascal simplex*, International Electronic Journal of Geometry, **10** (2017), No. 2, 46–55.

[29] **Németh, L.**: *On the binomial interpolated triangles*, Journal of Integer Sequences, **20** (2017), No. 7, Article 17.7.8.

[30] **Németh, L.**: *Pascal pyramid in the space* $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, Mathematical Communications, **22** (2017), 211–225.

[31] **Németh, L.**: *The growing ration of hyperbolic regular mosaics with bounded cells*, Armenian Journal of Mathematics, **9** (2017), No. 1, 1–19.

[32] **Németh, L.**: *The trinomial transform triangle*, Journal of Integer Sequences, **21** (2018), No. 7, Article 18.7.3.

[33] **Németh, L. and Szalay, L.**: *Coincidences in numbers of graph vertices corresponding to regular planar hyperbolic mosaics*, Annales Mathematicae et Informaticae, **43** (2014), 113–121.

[34] **Németh, L. and Szalay, L.**: *Alternating sums in hyperbolic Pascal triangles*, Miskolc Mathematical Notes, **17** (2016), No. 2, 989–998. doi: 10.18514/MMN.2017.1793.

[35] **Németh, L. and Szalay, L.**: *Recurrence sequences in the hyperbolic Pascal triangle corresponding to the regular mosaic* $\{4,5\}$, Annales Mathematicae et Informaticae, **46** (2016), 165–173.

[36] **Németh, L. and Szalay, L.**: *Power sums in hyperbolic Pascal triangles*, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius, Seria Matematica, **26** (2018), No. 1, 189–203. doi: 10.2478/auom-2018-0012.

[37] **Pengelley, D.**: *Pascal's Treatise on the Arithmetical Triangle: Mathematical Induction, Combinations, the Binomial Theorem and Fermat's Theorem*, in: *Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles* (B. Hopkins, ed.), Mathematical Association of America, 2009 pp. 185–196. doi: 10.5948/UPO9780883859742.025.

[38] **Ramírez, J. L. and Rubiano, G. N.**: *On the $k$-Fibonacci words*, Acta Universitatis Sapientiae, Informatica, **5** (2013), No. 2, 212–226. doi: 10.2478/ausi-2014-0011.

[39] **Ramírez, J. L. and Rubiano, G. N.**: *Biperiodic fibonacci word and its fractal curve*, Acta Polytechnica, **55** (2015), No. 1, 50–58. doi: 10.14311/AP.2015.55.0050.

[40] **Vinberg, E. B.** (ed.): *Geometry II. Spaces of Constant Curvature*, vol. 29 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1993. doi: 10.1007/978-3-662-02901-5.

[41] **Vincenzi, G. and Siani, S.**: *Fibonacci-like sequences and generalized Pascal's triangles*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **45** (2014), No. 4, 609–614. doi: 10.1080/0020739X.2013.851806.